Chapitre 1
Suites numériques

I. Comportement d'une suite

1) Monotonie

Définitions :

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :

- **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Une suite (u_n) est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Remarques :

Trois méthodes permettent l'étude de la monotonie d'une suite,

- **Méthode algébrique** : elle consiste à comparer directement u_n et u_{n+1}.
  - Soit en étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
  - Soit en comparant le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si, pour tout entier naturel $u_n \geqslant 0$.
- **Méthode fonctionnelle** : elle s'applique aux suites définies par une formule explicite de la forme $u_n = f(n)$ (f étant une fonction).

  Elle consiste à étudier le sens de variation du f sur $[0 ; +\infty[$. Le sens de variation de (u_n) s'en déduit.
- **Raisonnement par récurrence** : elle s'applique aux suites définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

  Elle consiste à démontrer qu'une des propriétés $P(n)$: $u_{n+1} \leqslant u_n$ ou $P(n)$: $u_{n+1} \geqslant u_n$ est vraie pour tout entier n.

Exemples :

- Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 + n + 5$.

  On a :

  $$u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 + (n+1) + 5 - (2n^2 + n + 5)$$

  $$u_{n+1} - u_n = 2n^2 + 4n + 2 + n + 1 + 5 - 2n^2 - n - 5$$

  $$u_{n+1} - u_n = 4n + 3$$

  $u_{n+1} - u_n > 0$ car $n \geqslant 0$, d'où $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc (u_n) est strictement croissante.

Comme la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + x + 5$ sur $\mathbb{R}^+$.

- Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = v_n - 2 \end{cases}$

  On a $v_{n+1} - v_n = v_n - 2 - v_n = -2$.

  D'où $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  Donc (v_n) est strictement décroissante.

  Contrairement à la fonction f définie par : $x \longmapsto x - 2$ qui est croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Suites bornées

Définitions :

Soit M et m deux nombres réels. On dit que la suite (u_n) est :

- **majorée** par M si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$. M est appelé un **majorant** de (u_n).
- **minorée** par m si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$. m est appelé un **minorant** de (u_n).
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques :

- Une suite majorée admet une infinité de majorants. En effet, si M est un majorant de (u_n), tous les réels supérieurs à M sont également des majorants de (u_n). De même, une suite minorée admet une infinité de minorants,
- Toute suite croissante est minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exemples :

- Soit la suite (u_n), définie pour tout $n \geqslant 1$, par $u_n = \dfrac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} > 0$.

  Cette suite est donc minorée par 0, mais aussi par tout réel négatif.

- Soit la suite (u_n), définie pour tout $n \geqslant 0$, par $u_n = n^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geqslant 0$.

  Cette suite est donc minorée par 0, qui est, en plus, le **minimum** de la suite, car il est atteint au rang 0.

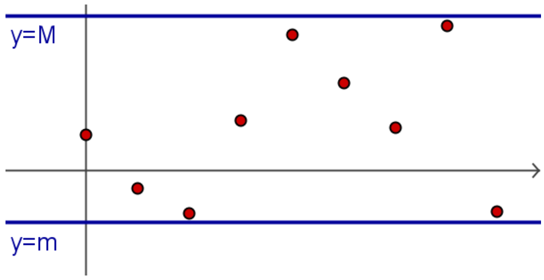
Représentation graphique d'une suite bornée :

- Sur la droite numérique :

  tous les nombres u_n sont compris entre m et M.

- Dans le plan :

  tous les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ sont situés entre les droites d'équations $y=m$ et $y=M$.



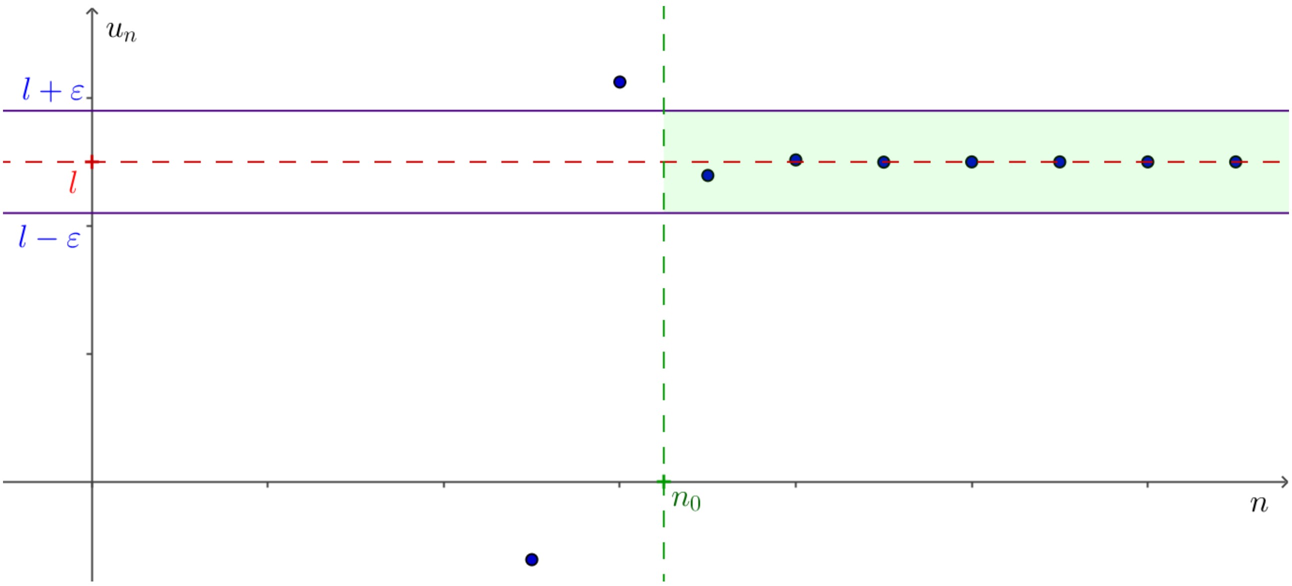
II. Limites finies

1) Définitions et propriétés

Définition :
Soit une suite (u_n) et un réel ℓ .
On dit que (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert I contenant ℓ (aussi « petit » soit-il) contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0.

Exemple :

La suite (u_n) représentée ci-dessous semble avoir une limite ℓ. Autrement dit, on peut trouver une valeur de n_0 pour laquelle les termes de la suite sont aussi proches que l'on veut de ℓ.



Remarque :

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a :

$$\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \text{ soit encore } u_n \in]\ell - \varepsilon\,;\ell + \varepsilon[, \text{ soit encore } |\,u_n - \ell\,| < \varepsilon.$$

Propriété :

Si une suite (u_n) a une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$, cette limite est **unique**.

On la note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Démonstration :

Supposons que (u_n) admette deux limites l et l' avec $l < l'$:

- $\left]l-1\,;\frac{l+l'}{2}\right[$ contient tous les termes u_n à partir du rang n_0 .
- $\left]\frac{l+l'}{2}\,;l'+1\right[$ contient tous les termes u_n à partir du rang n_1 .

Pour n plus grand que n_0 et n_1 , u_n appartiendrait à la fois aux deux intervalles qui sont disjoints.
C'est impossible donc (u_n) ne peut pas admettre deux limites finies distinctes.

Définitions :

- Une **suite convergente** est une suite qui a pour limite un nombre réel ℓ. On dit aussi que **la suite converge vers** ℓ.
- Une **suite divergente** est une suite qui ne converge pas.

Remarques :

- Si (u_n) converge vers ℓ, les suites (u_{n+1}) , (u_{2n}) , (u_{2n+1}) convergent aussi vers ℓ .
- Une suite convergente est bornée.

2) Limites des suites usuelles

Propriétés :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, les suites $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ convergent vers 0.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

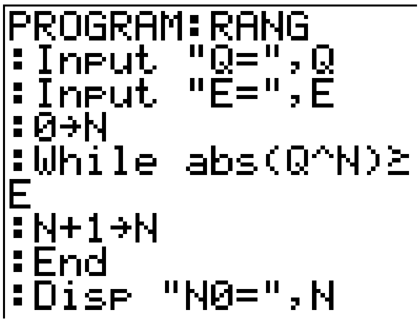
- Pour tout réel q tel que $-1 < q < 1$, la suite géométrique (q^n) converge vers 0.

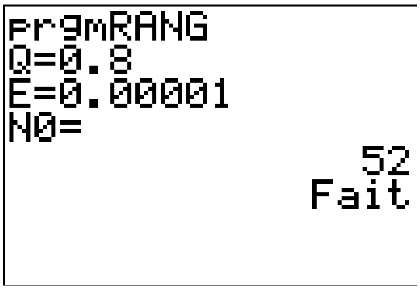
Algorithme :

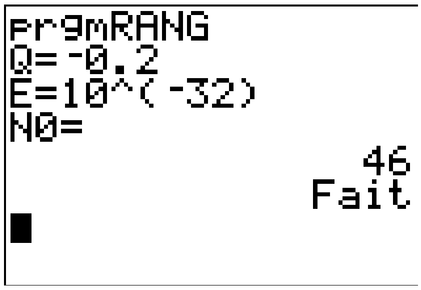
Déterminer le rang à partir duquel $|q^n| < \varepsilon$ pour $|q| < 1$

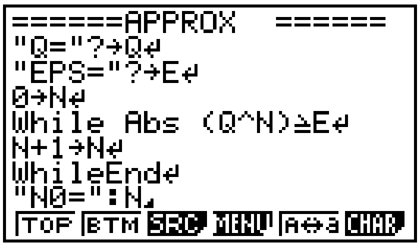
> $n \leftarrow 0$
> Tant que $|q^n| \geqslant \varepsilon$ faire
> $\quad n \leftarrow n+1$
> Fin Tant que

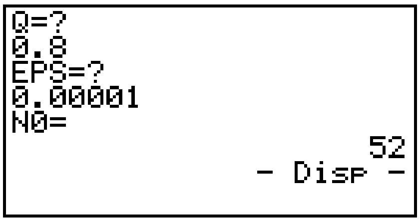
Calculatrice :

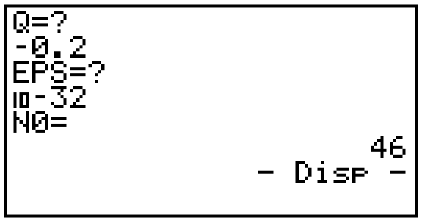












III. Suites divergentes

1) Limite infinie

Définition :

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque, pour tout réel A, l'intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel A, on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a :

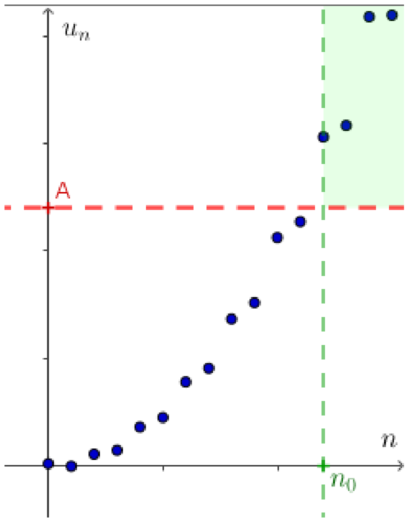
$$u_n \geqslant A.$$

On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple :

La suite (u_n) représentée ci-contre semble avoir pour limite $+\infty$.

En effet pour un réel A choisi, on peut déterminer le rang n_0 à partir duquel tous les termes sont supérieurs ou égaux à A.



Remarques :

- Lorsque $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ on dit que la suite (u_n) **diverge vers $+\infty$**.
- Concrètement, les termes deviennent aussi grands qu'on le souhaite à partir d'un certain rang.
- De la même façon :

  u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty\,; A[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0.

  On le note $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Limites des suites usuelles

Propriété :

Les suites $(\sqrt{n})$, (n^2) , (n^3) , … , (n^p) , où $p \in \mathbb{N}^*$, ont pour limite $+\infty$.

Démonstration :

Soit A un réel. Comme A est destiné à être aussi grand que l'on veut, on suppose $A>0$.

Alors dès que $n>A^2$, on a $A<\sqrt{n}\leqslant n\leqslant n^2\leqslant\ldots\leqslant n^p$.

Donc $\sqrt{n}$, n , n^2 , … , n^p appartiennent à $]A\,;+\infty[$ dès que $n>A^2$. Ils ont donc pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Propriété :

Les suites géométriques (q^n) où $q > 1$ divergent vers $+\infty$.

Donc, pour q réel tel que $q>1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

<u>Démonstration :</u>

Soit $q>1$. Posons $q=1+a$ où $a>0$.

Préliminaire : montrons par récurrence que pour tout $n\geqslant 0$, $(1+a)^n\geqslant 1+na$.

- Initialisation :

  Pour $n=0$, $(1+a)^n=1$ et $1+na=1$ donc l'inégalité est vérifiée pour $n=0$.

- Hérédité :

  Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $(1+a)^n\geqslant 1+na$. Montrons que $(1+a)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)a$.

  $(1+a)^n\geqslant 1+na$ et $(1+a)>0$ donc $(1+a)(1+a)^n\geqslant(1+a)(1+na)$.

  Soit $(1+a)^{n+1}\geqslant 1+na+a+na^2$, d'où $(1+a)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)a+na^2$.

  Comme $n\geqslant 0$ et $a^2>0$, $1+(n+1)a+na^2\geqslant 1+(n+1)a$.

  Ainsi $(1+a)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)a$.

- Conclusion :

  Pour tout $n\geqslant 0$, $(1+a)^n\geqslant 1+na$.

Soit *A* un réel. Dès que $n\geqslant\dfrac{A-1}{a}$ on aura $1+na\geqslant A$ et donc $(1+a)^n\geq A$.

La suite $((1+a)^n)$ c'est-à-dire la suite (q^n) a donc pour limite $+\infty$.

2) <u>Suites sans limite</u>

Une suite n'a pas forcément de limite. On dit également qu'elle **diverge**.

<u>Exemples :</u>

- La suite (u_n) définie sur ℕ, par $u_n=(-1)^n$ est divergente.

  En effet, un intervalle contenant 1 mais pas -1 ne contiendrait qu'un terme sur deux de la suite et ne répondrait donc pas à la définition de la limite d'une suite.

- La suite (v_n) définie sur ℕ, par $v_n=\sin n$ est divergente.

  En effet les termes de la suite se répartissent uniformément dans l'intervalle $[-1;1]$.

  La suite (v_n) n'a donc pas de limite.

IV. Opérations sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Soit l et l' deux réels.

1) Somme de deux suites

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) =$	$\boldsymbol{l + l'}$	$\boldsymbol{+\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	$\boldsymbol{+\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	**On ne peut pas conclure directement**

Remarque :

Dans le cas où l'on ne peut pas conclure, on dit que l'on a une **forme indéterminée**.

2) Produit de deux suites

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \times v_n) =$	$\boldsymbol{l \times l'}$	$\boldsymbol{+\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	$\boldsymbol{+\infty}$	**On ne peut pas conclure directement**

3) Quotient de deux suites

On suppose que pour tout entier n, $v_n \neq 0$.

Cas où la suite ***u* est positive** à partir d'un certain rang.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	l	0	$l > 0$ ou $+\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\boldsymbol{\dfrac{l}{l'}}$	$\boldsymbol{0}$	**On ne peut pas conclure directement**	$\boldsymbol{+\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	$\boldsymbol{+\infty}$ **si $\boldsymbol{l' > 0}$** $\boldsymbol{-\infty}$ **si $\boldsymbol{l' < 0}$**	**On ne peut pas conclure directement**

Dans le cas où la suite ***u* est négative** à partir d'un certain rang, on construit un tableau analogue en utilisant la règle des signes.

Exemples :

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies sur ℕ, par $u_n=\frac{2}{3n+5}$ et $v_n=n-\sqrt{n}$

- Pour la suite (u_n), on a $\lim_{n\to+\infty} 2=2$ et par produit et somme $\lim_{n\to+\infty}(3n+5)=+\infty$.

  Par quotient, on obtient $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$.

- Pour la suite (v_n), on est dans un cas où on ne peut pas conclure directement.

  En effet, on ajoute une suite qui tend vers $+\infty$ ($w_n=n$) à une suite qui tend vers $-\infty$ ($u_n=-\sqrt{n}$).

  En factorisant par *n* et en simplifiant, on a $v_n=n\times\left(1-\frac{\sqrt{n}}{n}\right)=n\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

  Or $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ et par quotient puis somme $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$.

  Par produit, on obtient $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

V. Propriétés sur les limites

1) Détermination de limites par comparaison

Propriétés :

Soit deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n\geqslant N$, $u_n\leqslant v_n$.

- **Théorème de minoration :**

  Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

- **Théorème de majoration :**

  Si $\lim_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

Démonstration :

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

On cherche à démontrer que tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de (v_n) à partir d'un certain rang.

Soit A un réel. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les u_n à partir d'un rang p : pour tout $n\geqslant p$, $u_n>A$.

Alors pour tout entier $n\geqslant max(p;N)$, on a $v_n\geqslant u_n>A$, c'est-à-dire $v_n\in\,]A;+\infty[$.

On en déduit : $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

La démonstration du théorème de majoration est analogue.

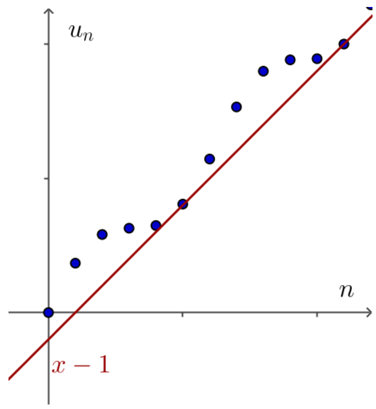
Exemple :

Soit la suite (u_n) définie sur ℕ, par $u_n = n + \sin(n)$.

Pour tout entier n, $\sin(n) \geqslant -1$, donc $u_n \geqslant n-1$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$, donc d'après le théorème de minoration :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty .$$



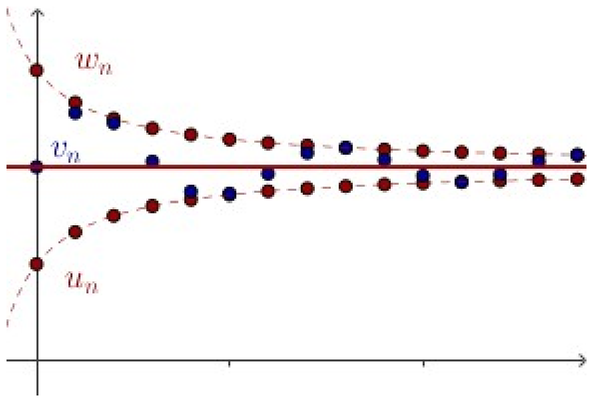
Théorème des gendarmes :

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Soit un entier N et un réel ℓ.

On suppose que pour tout entier $n \geqslant N$: $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors la suite (v_n) **converge** également vers ℓ.



Démonstration :

Soit I un intervalle contenant ℓ. On veut démontrer que cet intervalle contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang n_0.

On utilise les hypothèses :

- (u_n) tend vers ℓ, donc I contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_1.
- (w_n) tend vers ℓ, donc I contient tous les termes de la suite (w_n) partir d'un certain rang n_2.
- $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à, partir d'un certain rang N.

Soit $n_0 = max(n_1 ; n_2 ; N)$.

I contient donc tous les termes des suites (u_n) et (w_n) à partir du rang n_0.

Et $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Ce raisonnement s'applique pour n'importe quel intervalle ouvert I contenant ℓ, la suite (v_n) tend donc vers ℓ.

Remarques :

- Ce théorème permet de montrer que la suite (v_n) a une limite **et** de connaître cette limite.
- On en déduit que si $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang avec $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

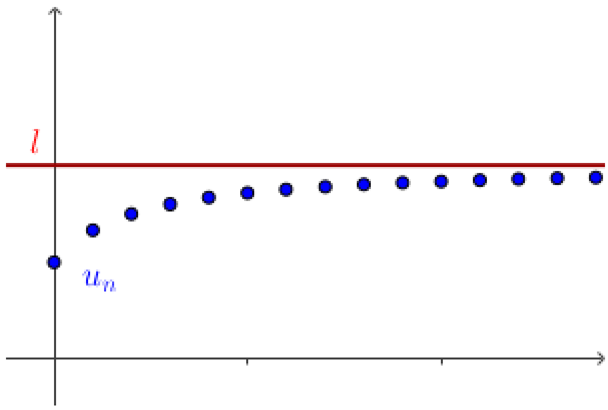
2) Convergence monotone

Propriété :

Soit une suite (u_n) **convergeant** vers un réel ℓ.

Si la suite (u_n) est **croissante**, alors la suite (u_n) est **majorée** par ℓ.

Donc, pour tout entier n, $u_n \leqslant \ell$.



Démonstration :

On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$.

- Comme la suite (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant n_0$, $\ell < u_{n_0} \leqslant u_n$.
- L'intervalle $]\ell - 1 \,;\, u_{n_0}[$ est un intervalle ouvert qui contient ℓ.

  Comme la suite (u_n) converge vers ℓ, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$,

  $u_n \in]\ell - 1 \,;\, u_{n_0}[$.

  Ainsi pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n < u_{n_0}$.

Alors, pour tout entier $n \geqslant max(N \,; n_0)$, on a $u_{n_0} \leqslant u_n$ et $u_n < u_{n_0}$.

On aboutit à une contradiction, et l'hypothèse initiale est donc fausse.

On en déduit que pour tout entier n, $u_n \leqslant \ell$.

Propriété :

Une suite qui **converge** est **bornée**.

Démonstration :

Soit la suite (u_n) et sa limite ℓ.

Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

L'intervalle $]\ell - 1\,;\ell + 1[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_0.

On raisonne par disjonction de cas.

- Si $n \geqslant n_0$, nous venons de voir que u_n est bornée par $\ell - 1$ et $\ell + 1$.
- Si $n < n_0$, nous avons un nombre fini de termes.

  Il s'agit des termes de l'ensemble $\{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n_0-1}\}$. Comme il y a un nombre fini de termes, il y a un plus grand et un plus petit élément parmi eux.

  Notre ensemble est donc borné.

La suite (u_n) est donc bornée dans les deux cas, c'est-à-dire pour les rangs inférieurs à n_0 et à partir du rang n_0, donc la suite (u_n) est bornée.

Exemple :

La suite (u_n) définie sur ℕ, par $u_n = -5 + \dfrac{3}{2+n^2}$ converge vers -5 et est bornée par -5 et -3,5.

Remarques :

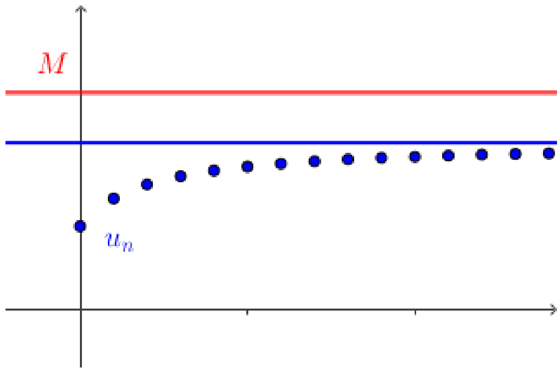
- La réciproque du théorème est fausse.

  Par exemple, la suite (v_n) définie sur ℕ par $v_n = (-1)^n$ est bornée mais elle diverge.
- Une suite **non bornée** est **divergente**.

  Par exemple, la suite (u_n) définie sur ℕ par $u_n = (-1)^n \times n$ n'est pas bornée, donc elle diverge.

Théorème de convergence monotone (admis) :

- Si une suite est **croissante** et **majorée**, alors elle **converge**.
- Si une suite est **décroissante** et **minorée**, alors elle **converge**.



Remarque :

Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite de la suite, mais seulement son existence et un majorant (ou minorant) de la limite.

Exemple :

La suite (u_n) définie sur ℕ, par $u_n=5+\frac{1}{n+1}$ est positive, donc minorée par 0, et décroissante.

Par conséquent (u_n) est une suite convergente.

Propriétés :

- Si une suite est **croissante** et **non majorée**, alors elle tend vers +∞.
- Si une suite est **décroissante** et **non minorée**, alors elle tend vers –∞.

Démonstration :

Soit (u_n) une suite non majorée, donc pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0}>M$.

Comme (u_n) est croissante, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0}$ et donc $u_n>M$.

Ce qui signifie que, pour tout $M \in \mathbb{R}$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]M\,;+\infty[$ à partir d'un certain rang. Donc, par définition, $\lim_{n \to +\infty} u_n=+\infty$.

La deuxième proposition se démontre de la même façon.

Remarque :

Une suite croissante est :

- soit majorée et convergente
- soit non majorée et divergente vers +∞.