Chapitre 0
Raisonnement par récurrence

I. Propriété mathématique

Définition :

Une **propriété mathématique** est une phrase, écrite ou non avec des symboles mathématiques, qui contient un verbe et qui est soit vraie soit fausse.

Remarque :

Lorsque la propriété concerne un entier naturel n, on peut la noter $P(n)$,

Exemples :

- Une égalité, $P(n)$: $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.
- Une inégalité, $P(n)$: $(1+\pi)^n \geqslant 1+n\pi$.
- Une phrase, $P(n)$: n^3-n est un multiple de 3.

II. Raisonnement par récurrence

1) Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=4^n-1$.

On a donc :

$$u_0=0 \ ; \ u_1=3 \ ; \ u_2=15 \ ; \ u_3=63 \ ; \ u_4=255 \ ; \ u_5=1023 \ldots$$

On remarque que tous ces nombres sont des multiples de 3.

On peut **conjecturer** que :

$$P(n) : u_n \text{ est un multiple de } 3$$

La démonstration de ce résultat repose sur un type de raisonnement appelé **raisonnement par récurrence**.

2) Le principe de récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier n et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si l'on démontre les deux étapes suivantes :

- **Initialisation** : $P(n)$ est vraie pour un entier n_0
- **Hérédité** : pour tout entier $k \geqslant n_0$, « $P(k)$ est vraie » implique « $P(k+1)$ est vraie »

alors, on peut conclure que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geqslant n_0$, Le schéma suivant illustre le principe de récurrence.

Initialisation	**Hérédité**
$P(n_0)$ est vraie	pour tout entier $k \geqslant n_0$, « $P(k)$ est vraie » $\Rightarrow$ « $P(k+1)$ est vraie »

Conclusion : $P(n_0)$ vraie $\Rightarrow P(n_0+1)$ vraie $\Rightarrow P(n_0+2)$ vraie $\Rightarrow \ldots \Rightarrow P(n)$ vraie

3) Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier n et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, on procède ainsi

- **Initialisation** : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang n_0)
- **Hérédité** : on démontre, pour tout entier $k \geqslant n_0$, l'implication :

  $$P(k) \text{ vraie} \Rightarrow P(k+1) \text{ vraie}$$

  Pour cela, on considère un entier quelconque k, avec $k \geqslant n_0$, et on suppose que $P(k)$ est vraie (c'est-à-dire que l'on suppose que la propriété est vraie au rang k). C'est l'**hypothèse de récurrence**.

  On démontre alors que $P(k+1)$ est vraie (c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $k+1$) en utilisant l'hypothèse de récurrence,
- **Conclusion** : On conclut, d'après le principe de récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Remarque :

L'initialisation se fait souvent pour $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$. On vérifie donc que $P(0)$ ou $P(1)$ est vraie.

Exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$ la propriété : « $4^n - 1$ est multiple de 3 ».

Démontrons, par récurrence, que la propriété est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation** :

  $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \times 0$. Donc $4^0 - 1$ est bien multiple de 3.

  Ainsi $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** :

  Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque fixé, tel que $4^k - 1 = 3 \times p$, avec p entier (il s'agit de l'*hypothèse de récurrence*).

  Pour cet entier k quelconque et fixé, on remarque que :

  $$4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1 = (3+1) \times 4^k - 1 = 3 \times 4^k + (4^k - 1) .$$

  Or d'après l'hypothèse de récurrence : $4^k - 1 = 3 \times p$. On en déduit donc que :

$$4^{k+1}-1=3\times 4^{k}+3\times p=3\times(4^{k}+p)=3\times p'$$, avec p' entier.

Donc $4^{k+1}-1$ est multiple de 3.

On a montré que, si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ l'est aussi.

- **Conclusion** :

  La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire pour $k \geqslant 0$ donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 0$.

Remarques :

Il est important de respecter les étapes de la démonstration.

- La phase d'initialisation est indispensable.

  Par exemple, la proposition : « 2^n est un multiple de 3 » est héréditaire pourtant elle est fausse.

- La conclusion termine le raisonnement en combinant les étapes d'initialisation et d'hérédité.

  La propriété est vraie au rang n_0 (initialisation) et elle est héréditaire à partir du rang n_0 donc la propriété est vraie au rang $n_0 + 1$.

  La propriété est vraie au rang $n_0 + 1$ et elle est héréditaire à partir du rang n_0 donc la propriété est vraie au rang $n_0 + 2$.

  …

  En procédant ainsi, pas à pas, on peut conclure que la propriété est vraie pour n'importe quel entier $n \geqslant n_0$.