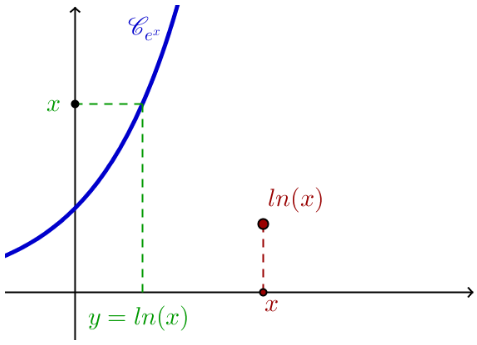
# Chapitre 9
# Logarithme népérien

## I. La fonction logarithme népérien

### 1) Liens avec la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.




De plus, $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc d'après la généralisation du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout nombre réel $x$ de $]0;+\infty[$, il existe un unique nombre réel $y$ tel que $e^y = x$.

**Définition :**

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout nombre réel $x>0$, associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue $y$.

On note $y = \ln x$.

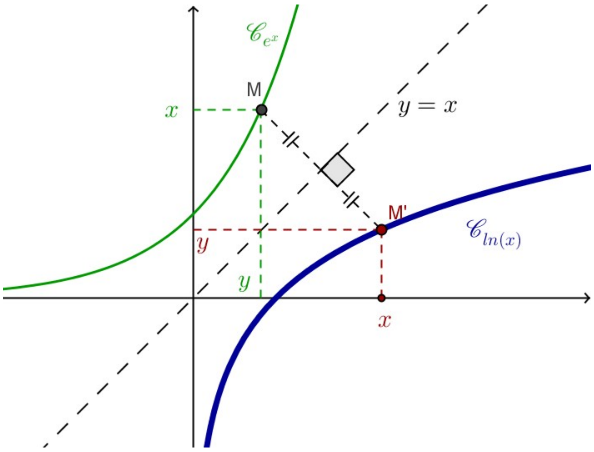
**Conséquences :**

Elles découlent directement de la définition précédente.

- Pour tout nombre réel $x>0$ et tout nombre réel $y$, $x = e^y$ équivaut à $y = \ln x$.
- Pour tout nombre réel $x>0$, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout nombre réel $x$, $\ln(e^x) = x$.
- $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1$) ; $\ln e = 1$ (car $e^1 = e$) ; $\ln \frac{1}{e} = -1$ (car $e^{-1} = \frac{1}{e}$)

**Propriété :**

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$ .




*Démonstration :*

On note respectivement $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives des fonctions $\exp$ et $\ln$ .

Pour tous nombres réels $x$ et $y>0$ , dire que $M'(x;y)$ appartient à $\mathscr{C}'$ équivaut à $y=\ln x$ c'est-à-dire $x=e^y$ ce qui équivaut à dire que $M(y;x)$ appartient à $\mathscr{C}$.

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$ .

**Remarque :**

On dit que les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont **réciproques** l'une de l'autre.

## 2) Sens de variation de la fonction ln

**Propriété :**

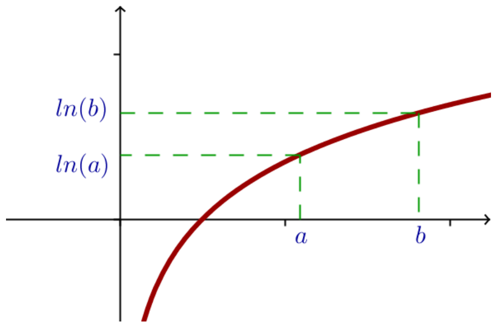
La fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$ .

*Démonstration :*

$a$ et $b$ sont deux nombres réels tels que $0<a<b$ , c'est-à-dire tels que $e^{\ln a}<e^{\ln b}$ .

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\ln a<\ln b$$



**Conséquences :**

Pour tous nombres réels $a>0$ et $b>0$ .

- $\ln a=\ln b$ équivaut à $a=b$
- $\ln a<\ln b$ équivaut à $a<b$
- $\ln a>0$ équivaut à $a>1$ et $\ln a<0$ équivaut à $0<a<1$ .

# II. Propriétés algébriques

## 1) Relation fonctionnelle

**Propriété :**

Pour tous nombres réels $a>0$ et $b>0$ ,

$$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$$

*Démonstration :*

*a* et *b* sont deux réels strictement positifs. On note $A=\ln(ab)$ et $B=\ln(a)+\ln(b)$ .

Alors $e^A=ab$ et $e^B=e^{\ln(a)+\ln(b)}=e^{\ln(a)}\times e^{\ln(b)}=ab$ . Donc $e^A=e^B$ d'où $A=B$ .

**Remarques :**

- On dit que la fonction $\ln$ transforme les produits en somme.
- Pour tous nombres strictement positifs $a_1$ , $a_2$ , …, $a_n$ :
  $\ln(a_1\times a_2\times\ldots\times a_n)=\ln(a_1)+\ln(a_2)+\ldots+\ln(a_n)$

## 2) Logarithme d'un inverse, d'un quotient

**Propriétés :**

Pour tous nombres réels $a>0$ et $b>0$ .

- $\ln\frac{1}{b}=-\ln b$
- $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

*Démonstrations :*

- Pour $b>0$ , $b\times\frac{1}{b}=1$ ; donc $\ln\left(b\times\frac{1}{b}\right)=0$ , c'est-à-dire $\ln b+\ln\frac{1}{b}=0$ ,d'où $\ln\frac{1}{b}=-\ln b$ .
- Pour $a>0$ et $b>0$ , $\ln\frac{a}{b}=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\frac{1}{b}=\ln a-\ln b$ .

## 3) Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

**Propriété :**

Pour tout nombre réel $a>0$ et pour tout nombre entier relatif $n$ :

$$\ln\left(a^n\right)=n\ln a$$

*Démonstration :*

- Cas où $n$ est un nombre entier naturel : on utilise un raisonnement par récurrence.
  - Initialisation : pour $n=0$, $\ln\left(a^0\right)=\ln 1=0$ et $0\ln a=0$.
  - Hérédité : on considère un nombre entier naturel $k$ tel que $\ln\left(a^k\right)=k\ln a$.

    Alors $\ln\left(a^{k+1}\right)=\ln\left(a^k\times a\right)=\ln\left(a^k\right)+\ln a=k\ln a+\ln a=(k+1)\ln a$.
  - Conclusion : pour tout nombre entier naturel $n$, $\ln\left(a^n\right)=n\ln a$.
- Cas où $n$ est un nombre entier strictement négatif

  $\ln\left(a^n\right)=\ln\left(\dfrac{1}{a^{-n}}\right)=-\ln\left(a^{-n}\right)=-(-n)\ln a=n\ln a$ car $-n>0$.

**Exemple :**

Pour tout nombre réel $x>0$, $\ln\left(x^2\right)=2\ln x$.

**Propriété :**

Pour tout nombre réel $a>0$ :

$$\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$$

*Démonstration :*

Pour $a>0$, $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, donc $\ln\left(\sqrt{a}\right)^2=\ln a$ soit $2\ln\sqrt{a}=\ln a$, d'où $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$.

**Exemple :**

$\ln\sqrt{2}-\frac{1}{3}\ln 4=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{3}\ln\left(2^2\right)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{2}{3}\ln 2=-\frac{1}{6}\ln 2$.

# III. Étude de la fonction ln

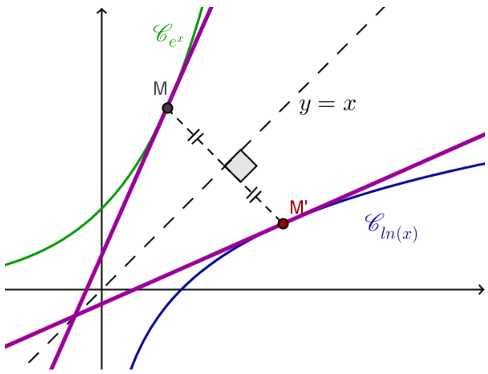
## 1) Dérivabilité et continuité de ln

**Propriétés :**

La fonction $\ln$ est **dérivable** sur $]0;+\infty[$ et pour tout nombre réel $x>0$.

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}$$

*Démonstrations :*




- Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions $\exp$ et $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$. Or, les symétries axiales conservent le contact, donc une tangente à la courbe représentative de $\exp$ a pour symétrique une tangente à la courbe représentative de $\ln$. De plus, aucune tangente à la courbe de $\exp$ n'est parallèle à l'axe des abscisses, donc aucune tangente à la courbe de $\ln$ n'est parallèle à l'axe des ordonnées.

  Ainsi, la fonction $\exp$ étant dérivable sur ℝ, sa réciproque $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

- $f$ est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=e^{\ln(x)}=x$.

  $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$.

  $f'(x)=\exp'(\ln x)\times\ln'(x)=\exp(\ln x)\times\ln'(x)=x\ln'(x)$.

  Or $f(x)=x$, donc $f'(x)=1$. Par conséquent, pour tout $x>0$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

**Propriété :**

La fonction $\ln$ est **continue** sur $]0;+\infty[$.

En effet, toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

**Propriété :**

La fonction $\ln$ est **concave** sur $]0;+\infty[$.

*Démonstration :*

Soit $f$ la fonction définie, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $f''(x)=\frac{-1}{x^2}$.

Or, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\frac{-1}{x^2}<0$. Ainsi, $f''(x)<0$ et, par conséquent, $f$ est concave sur $]0;+\infty[$.

## 2) Limite de ln en 0 et en $+\infty$

**Propriétés :**

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

*Démonstrations :*

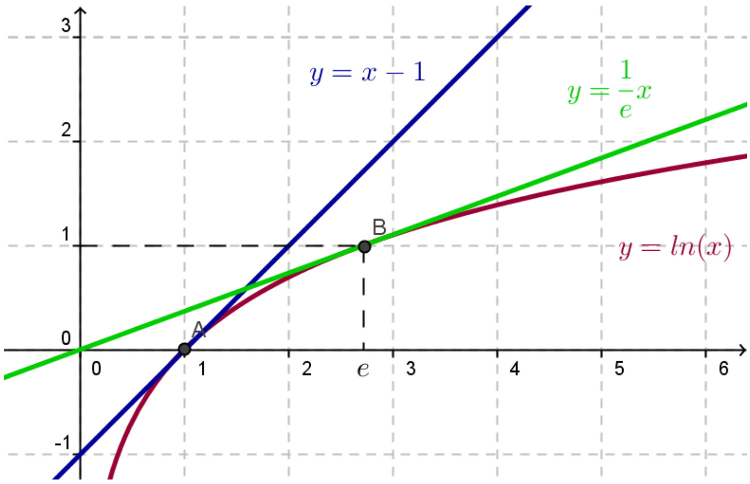
- Pour tout nombre réel $A$, $\ln x > A \Leftrightarrow x > e^A$. Donc $\ln x > A$ pour tout nombre réel $x > e^A$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
- On a, pour $x > 0$, $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = \lim\limits_{x \to 0} -\ln \frac{1}{x}$.

  Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} (-\ln X) = -\infty$.

  D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

## 3) Tableau de variation et courbe

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\ln'$ | $+$ |
| $\ln$ | $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ |




L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de $\ln$.

# IV. Compléments sur la fonction ln

## 1) Limites

**Propriété :**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

*Démonstration :*

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc en 1.

Cela signifie que $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \ln'(1)$.

Or $\ln 1 = 0$ et $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$, donc $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

**Remarque :**

On en déduit que pour $h$ proche de 0 : $\ln(1+h) \approx h$.

## Croissances comparées

**Propriétés :**

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$

*Démonstrations :*

- Pour $x > 0$, $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{e^{\ln x}}$.

  De plus $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ (par croissance comparée)

  Donc d'après le théorème de la limite d'une fonction composée, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

- Pour $x > 0$, $x \ln x = e^{\ln x} \times \ln x$.

  De plus $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{X \to -\infty} X e^X = 0$ (par croissance comparée)

  Donc d'après le théorème de la limite d'une fonction composée, $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$

**Généralisation :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

## 2) Fonction $x \mapsto \ln(u(x))$

**Notation :**

$u$ désigne une fonction strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ définie sur $I$ est notée $\ln u$.

$x \mapsto u(x) \mapsto \ln(u(x))$

**Propriété :**

$u$ est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $\ln u$ est **dérivable** sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

*Démonstration :*

On utilise la propriété $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

En particulier, avec la fonction $f = u$, dérivable et strictement positive sur l'intervalle I et $g = \ln$, on obtient, pour tout réel $x$ appartenant à I, la dérivée de $\ln(u(x))$ :

$$\ln'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

**Propriété :**

Les fonctions $u$ et $\ln u$ ont le même sens de variation sur I.

*Démonstration :*

$(\ln u)'$ a le même signe que $u'$ car $u > 0$.

**Exemple :**

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+1)$.

$f = \ln u$ où $u$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2+1$.

Or, $u$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

## 3) La fonction logarithme décimal

**Définition :**

La fonction logarithme décimal, notée $\log$, est définie pour tout réel $x$ de $]0;+\infty[$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

**Propriété :**

La fonction logarithme décimal vérifie les mêmes propriétés algébriques que la fonction $\ln$.

**Exemples :**

$\log 1 = 0$ ; $\log 10 = 1$ ; $\log 0{,}1 = -1$ ; $\log 100 = 2$ ; $\log 0{,}01 = -2$

**Remarques :**

- Pour tout réel $x$ strictement positif et tout entier relatif $n$, on a :
  $10^n \leqslant x < 10^{n+1} \Leftrightarrow n \leqslant \log x < n+1$.
- Les fonctions $x \mapsto 10^x$ et $x \mapsto \log x$ sont réciproques l'une de l'autre.