Chapitre 3
Limites de fonctions

I. Limite à l'infini

1) Limite infinie

Dire qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que $f(x)$ peut être « aussi grand que l'on veut » dès que x est « assez grand ».

Définition :

Si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ où A est un réel, contient tous les $f(x)$ lorsque x est « suffisamment grand », alors f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

Exemples :

Fonctions de référence :

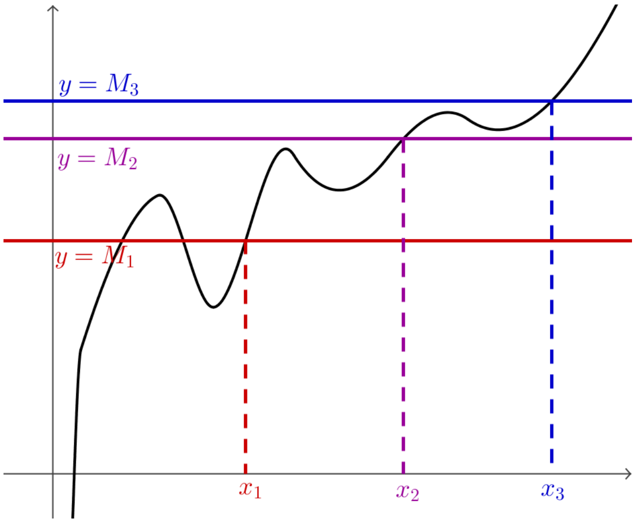
- $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ pour $n\in\mathbb{N}^*$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty$

Remarque :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ se traduit par : $\forall M \in\mathbb{R},\ \exists x_0 \in\mathbb{R},\ x>x_0 \Rightarrow f(x)>M$.

Interprétation graphique :

La courbe représentative de la fonction f dans un repère est au-dessus de toute droite parallèle à l'axe des abscisses pour x « suffisamment grand ».



Pour $M = M_1$: pour tout $x > x_1$, on a $f(x) > M$.

Pour $M = M_2$: pour tout $x > x_2$, on a $f(x) > M$.

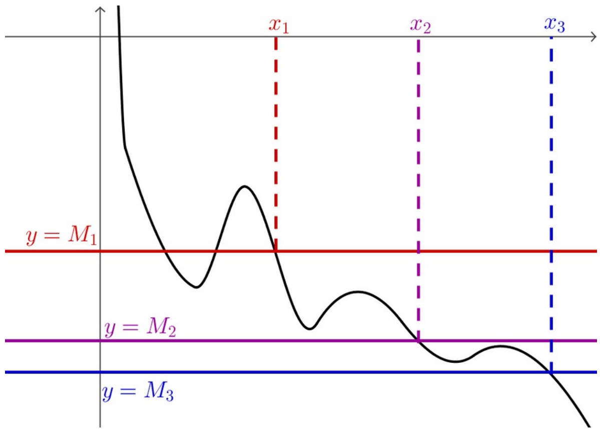
Pour $M = M_3$: pour tout $x > x_3$, on a $f(x) > M$.

De la même façon, on définit les autres limites infinies :

Définition :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se traduit par :

$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \Rightarrow f(x) < M$.



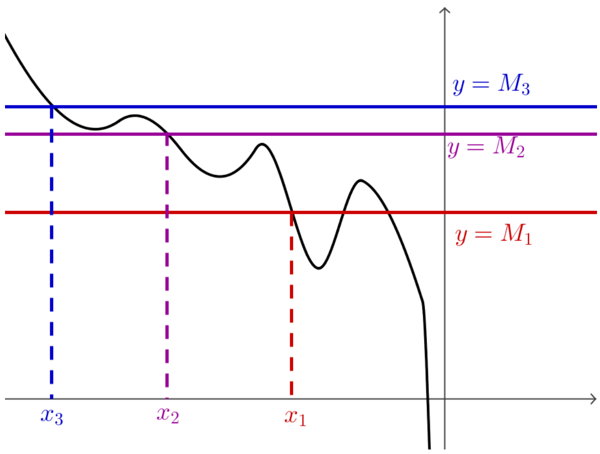
Exemple :

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$

Définition :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se traduit par :

$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ x < x_0 \Rightarrow f(x) > M$.



Exemple :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Prouvons que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, c'est-à-dire que, pour tout nombre M strictement positif, $f(x) \in]M ;+\infty[$ dès que x est inférieur à un certain nombre A .

La condition $f(x) > M$ s'écrit $x^2 > M$, ceci équivaut à $x < -\sqrt{M}$ ou $x > \sqrt{M}$.

On peut donc prendre $A = -\sqrt{M}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

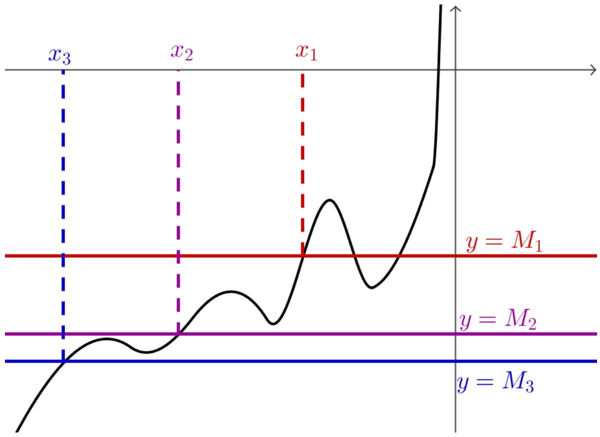
Définition :

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se traduit par :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, x < x_0 \Rightarrow f(x) < M.$$

Exemple :

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$



2) Limite finie

Si $f(x)$ est « aussi proche de L que l'on veut » dès que x est « assez grand », on dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$.

Définition :

Si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les $f(x)$ dès que x est « assez grand », on dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$.

On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$.

Quel que soit le réel $k > 0$, il existe un réel $A > 0$, tel que si $x > A$ alors $f(x) \in]2-k; 2+k[$.

En effet, il suffit de prendre $x > \frac{1}{k}$.

On a alors $0 < \frac{1}{x} < k$

D'où $2 < 2 + \frac{1}{x} < 2 + k$.

C'est-à-dire $f(x) \in]2-k; 2+k[$. On a donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Exemple :

Fonctions de référence :

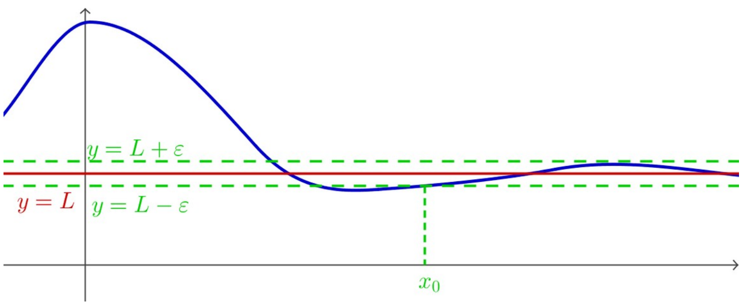
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$

Remarque :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ se traduit par : $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $x > x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Interprétation graphique :

La courbe représentant la fonction f dans un repère devient « aussi proche que l'on veut » de la droite d'équation $y = L$ lorsque x est « assez grand ».



Définition :

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, on dit que, dans un repère, la droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** en $+\infty$ à la courbe représentative de f .

Remarque :

Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d d'équation $y = L$, on étudie le signe de la différence $f(x) - L$.

Exemple :

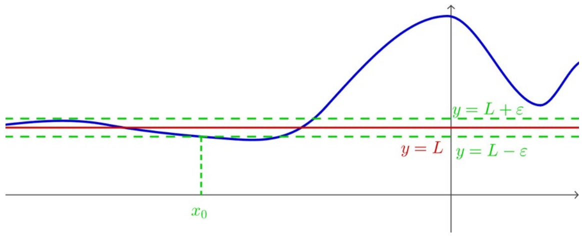
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale en +∞ à la courbe représentative de $\frac{1}{\sqrt{x}}$. De plus, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ donc la courbe est située au-dessus de l'asymptote.

De la même façon, on a :

Définition :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ se traduit par :

$\forall \epsilon > 0$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.



Exemple :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

II. Limite en un réel

1) Limite infinie

Définition :

Soit f une fonction et a un nombre réel, borne de l'ensemble de définition de f n'appartenant pas à cet ensemble.

Si $f(x)$ est « aussi grand que l'on veut » dès que x est « assez proche » de a, on dit que la limite en a de la fonction f est +∞.

On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Remarque :

En pratique, on est parfois amené à étudier séparément les limites de f pour $x > a$ et pour $x < a$.

On parle alors de « limite de f à droite en a », notée $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et de « limite de f à gauche en a », notée $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{3}{(x-1)^2}$. Montrons que $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$.

Soit un réel $m>0$, déterminons un réel $h>0$ tel que $x\in]1-h;1+h[\Rightarrow f(x)>m$.

$\dfrac{3}{(x-1)^2}>m\Leftrightarrow(x-1)^2<\dfrac{3}{m}\Leftrightarrow|x-1|<\sqrt{\dfrac{3}{m}}$.

Pour tout $x\in\left]1-\sqrt{\dfrac{3}{m}};1+\sqrt{\dfrac{3}{m}}\right[$, on a $f(x)>m$, c'est-à-dire $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$.

Exemple :

Fonctions de référence :

- $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$
- $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$ pour $n\in\mathbb{N}^*$
- $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

Remarque :

$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ se traduit par : $\forall M\in\mathbb{R},\ \exists\alpha>0\ ,\ |x-a|<\alpha\ \Rightarrow\ f(x)>M$.

De la même façon, on a :

Définition :

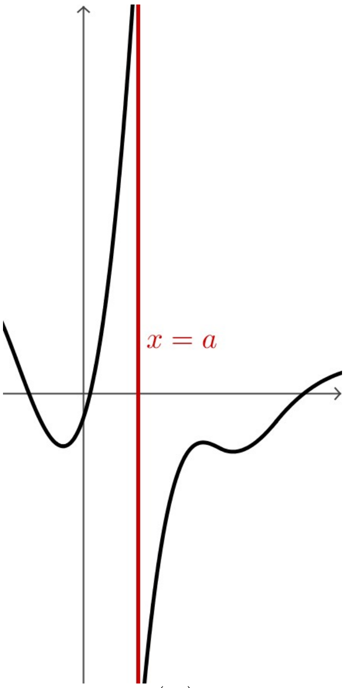
$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ se traduit par : $\forall M\in\mathbb{R},\ \exists\alpha>0\ ,\ |x-a|<\alpha\ \Rightarrow\ f(x)<M$.

Exemple :

$\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

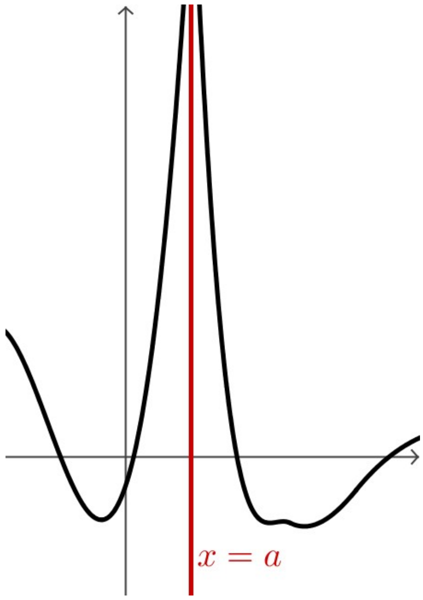
Interprétation graphique :

La courbe représentant f peut être « aussi proche que l'on veut » de la droite d'équation $x=a$.

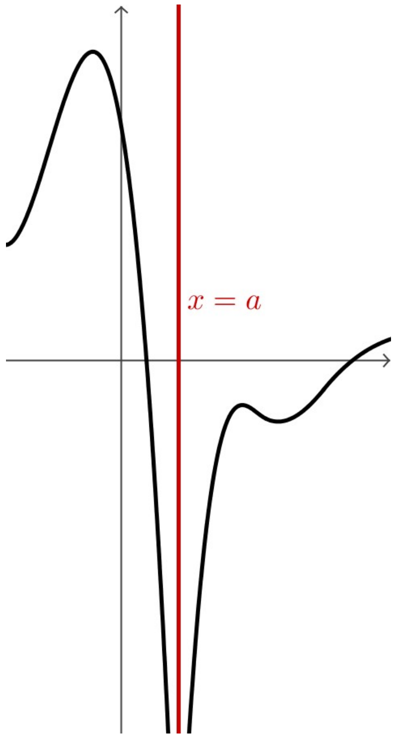


$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Définition :

Lorsqu'une fonction f admet une limite infinie en un réel a (ou à droite en a ou à gauche en a), on dit que la droite d'équation $x=a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f.

Exemple :

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de ces fonctions.

2) Limite finie

Définition :

Soit f une fonction et a un nombre réel, appartenant à l'ensemble de définition de f (éventuellement a est une borne). Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Dire que f a pour limite ℓ quand x tend vers a signifie que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Propriétés :

Soit a un réel.

- Si $a \geqslant 0$, $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
- Si P est un polynôme, alors $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$.
- Si F est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) définie en a, alors $\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$.
- $\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$ et $\lim_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$.
- $\lim_{x \to a} e^x = e^a$

III. Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. L et L' désignent des réels.

Somme

Si $\lim_{x \to a} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim_{x \to a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \to a} (f+g)(x) =$	$\boldsymbol{L + L'}$	$\boldsymbol{+\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	$\boldsymbol{+\infty}$	$\boldsymbol{-\infty}$	**On ne peut pas conclure directement**

Exemple :

On cherche la limite en $+\infty$ de $h(x) = x^2 + x$.

On pose $h(x) = f(x) + g(x)$ où $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Remarque :

Dans le cas où l'on ne peut pas conclure, on dit que l'on a une **forme indéterminée**.

Produit

Si $\lim_{x \to a} f(x) =$	L	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim_{x \to a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) =$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

Exemple :

On cherche la limite en $+\infty$ de $h(x) = x^2 - x$.

On pose $h(x) = f(x) + g(x)$ où $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, on aboutit à une forme indéterminée pour la limite de $h(x)$.

Pour lever l'indétermination, on factorise la fonction $h(x) = x(x-1)$.

On pose $h(x) = f(x) \times g(x)$ avec $f(x) = x$ et $g(x) = x - 1$. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \times \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Quotient

- Cas où $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Si $\lim_{x \to a} f(x) =$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
et $\lim_{x \to a} g(x) =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	∞
alors $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{L}{L'}$	**0**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

- Cas où $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

Si $\lim_{x \to a} f(x) =$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim_{x \to a} g(x) =$	0^+	0^+	0^-	0^-	0
alors $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

Remarque :

$\lim_{x \to a} g(x) = 0^+$ signifie que la limite de g en a est nulle et pour x « aussi proche de a que l'on veut », $g(x)$ est positif.

Exemple :

On cherche la limite en +∞ de $h(x)=\frac{(x+1)^2}{x}$.

On pose $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x)=(x+1)^2$ et $g(x)=x$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, on aboutit à une forme indéterminée pour la limite de $h(x)$.

Pour lever l'indétermination, on développe la fonction $h(x)=\frac{(x^2+2x+1)}{x}=x+2+\frac{1}{x}$.

On pose $h(x)=f(x)+g(x)$ avec $f(x)=x+2$ et $g(x)=\frac{1}{x}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, donc $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)+\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Propriétés :

- Une **fonction polynôme** a même limite en –∞ et en +∞ que son terme de plus haut degré.
- Une **fonction rationnelle** a même limite en –∞ et en +∞ que le quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et son dénominateur.

Exemple :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-3}{3x+4}=\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{3x}=\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3}x=-\infty$$

2) Composée de deux fonctions

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F et g définie sur un ensemble F .

La fonction $g\circ f$, définie pour tout x de E par $g\circ f(x)=g(f(x))$, est appelée **composée** de f suivie de g .

Exemple :

Soit f et g les fonctions définies sur ℝ par $f(x)=3x^4+5x-1$ et $g(x)=x^2$.

Alors, pour tout réel x, $g\circ f(x)=g(f(x))=g(3x^4+5x-1)=(3x^4+5x-1)^2$.

Remarque :

Attention à l'ordre des lettres pour la composée : en général $g\circ f\neq f\circ g$.

Propriété (admise) :

a, *b* et *c* désignent des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$, f et g sont des fonctions.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} g(X) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g[f(x)] = c$.

Exemple :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 5\right) = 5$ et $\lim\limits_{X \to 5} X^2 = 25$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 5\right)^2 = 25$.

Remarque :

Si x se rapproche de a, $f(x)$ se rapproche de b et pour les X proches de b, $g(X)$ se rapproche de c. Donc en posant $X = f(x)$, on obtient que $g(f(x))$ se rapproche de c lorsque x se rapproche de a.

IV. Limites et comparaison

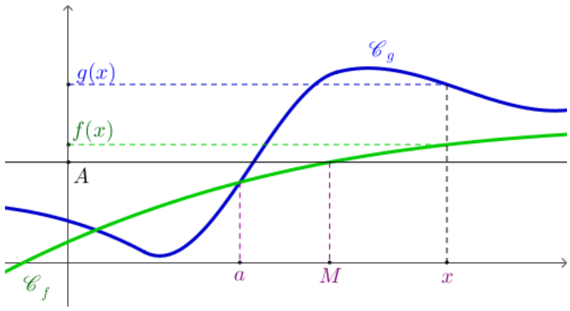
1) Théorèmes de comparaison

Théorème de minoration :

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, $f(x) \leq g(x)$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Démonstration :



Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, tout intervalle $]A;+\infty[$ (avec A un nombre réel) contient tous les $f(x)$ pour x supérieur à un nombre réel M.

Ainsi pour tout $x > M$, $f(x) > A$.

D'après $f(x) \leq g(x)$, pour tout $x > a$, $f(x) \leq g(x)$.

Donc pour tout x supérieur à la fois à M et a,

$g(x) \geqslant f(x) > A$.

Donc, tout intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les $g(x)$ pour x assez grand et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Théorème de majoration :

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x > a$, $f(x) \leqslant g(x)$.

Si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + \sin x$.

Pour tout nombre réel x, $\sin x \leqslant 1$, donc $f(x) \leqslant -2x + 1$.

Or $\lim_{x \to +\infty} (-2x+1) = -\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque :

Ces deux propriétés s'étendent aux cas des limites en $-\infty$ et en un point en changeant l'ensemble de validité et l'inégalité.

2) Théorème des gendarmes

Propriété :

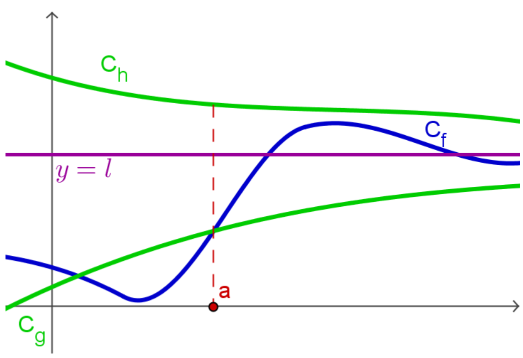
On considère trois fonctions *f*, *g* et *h* définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ telles que :

pour tout réel $x > a$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

On suppose que :

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = L$ (où L est un nombre réel.)

Alors f admet pour limite L en $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$



Démonstration :

Soit ε > 0, un réel quelconque.
Sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$, par définition, il existe $A \in I$ tel que pour tout $x > A$, on ait $g(x) \in]L - \varepsilon ; L + \varepsilon[$. Sachant aussi que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$, par définition, il existe $B \in I$ tel que pour tout $x > B$, on ait $h(x) \in]L - \varepsilon ; L + \varepsilon[$.
Pour tout $x > C$, où C est le plus grand des deux réels A et B, on a $g(x)$ et $h(x)$ dans $]L - \varepsilon ; L + \varepsilon[$. On a donc, pour tout $x > C$: $L - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \leqslant L + \varepsilon$.
C'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Exemple :

f est la fonction définie sur $]0 ;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Pour tout nombre réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Donc, pour tout nombre réel $x > 0$, $\dfrac{-1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Remarque :

Ce théorème s'étend au cas de limites en $-\infty$ et en un point en changeant l'ensemble de validité de la condition.

3) Croissances comparées

Propriété :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Démonstration :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	0 $\quad$ $+$
$f'(x)$	1 ↗
$f(x)$	1 ↗

f est la fonction définie sur $[0 ;+\infty[$ par $f(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x^2$.

Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x - 1$.
Sur $[0 ;+\infty[$, $e^x \geqslant 1$, donc $f''(x) \geqslant 0$ et f' est croissante sur $[0 ;+\infty[$.
$f'(0) = 1$, donc $f'(x) > 0$ sur $[0 ;+\infty[$.
Donc, f est croissante sur $[0 ;+\infty[$. Comme $f(0) = 1$, on en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) > 0$, c'est-à-dire $e^x > \dfrac{1}{2}x^2$.

Par conséquent, pour tout $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{1}{2}x$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}x\right) = +\infty$ donc d'après le théorème de minoration, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Propriété :

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$$

Démonstration :

Pour tout nombre réel *x*, on pose $X = -x$. Ainsi $xe^x = -Xe^{-X} = -\frac{X}{e^X}$.

$\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et d'après la propriété précédente, $\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc $\lim_{X \to +\infty} \left(-\frac{X}{e^X} \right) = 0$.

Donc d'après la propriété de la limite d'une fonction composée, $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$.

Propriété :

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$$

En effet, en posant $X = -x$, alors $xe^{-x} = -Xe^X$. Or $\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim_{X \to -\infty} Xe^X = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$.

Généralisation :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Remarque :

On a bien évidemment :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$