Chapitre 5
Continuité

I. Fonction continue

1) Continuité

Définition :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

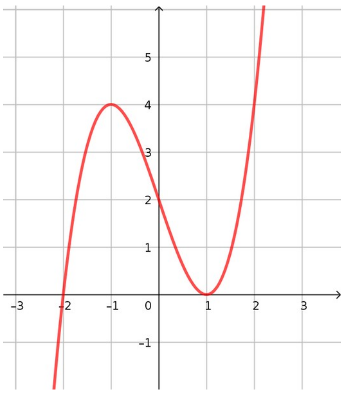
On dit que la fonction f est **continue en** un réel $\boldsymbol{a}$ de I si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

On dit que la fonction f est **continue sur $\boldsymbol{I}$** si f est continue en tout réel a de I.

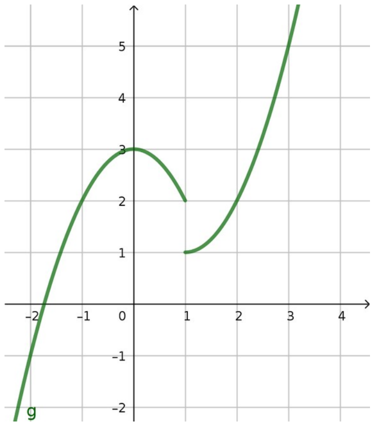
Exemples :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$



f est continue sur $\mathbb{R}$.

- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} 3 - x^2 \; si \; x \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 \; si \; x > 1 \end{cases}$



g n'est pas continue en 1, donc elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

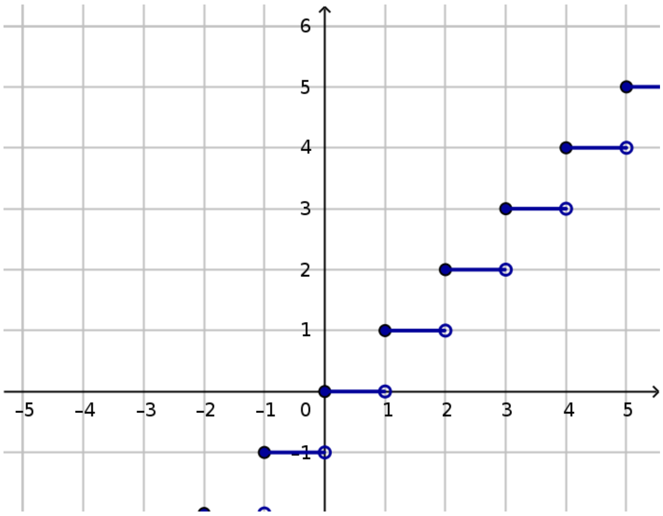
- Les fonctions carrée, cube, cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction partie entière E est définie sur $\mathbb{R}$ par $E(x)=n$, où n est l'entier relatif tel que $n \leqslant x < n+1$.

  Ainsi si $0 \leqslant x < 1$ alors $E(x)=0$ et si $1 \leqslant x < 2$ alors $E(x)=1$.

  Donc $\lim\limits_{x \to 1^-} E(x)=0$ alors que $E(1)=1$.

  On dit que E est **discontinue** en 1, et de façon générale, en tout entier relatif.

  La courbe $\mathscr{C}_E$ est « en escaliers » et présente des sauts en ses points d'abscisses entières.



2) Propriétés

Propriétés (admise) :

- Les fonctions affines, les fonctions polynômes, la fonction racine carrée et la fonction exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues sur chacun des intervalles formant leur ensemble de définition.

Exemple :

La fonction f, définie sur $]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+5}{x-1}$, est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,1[$ et $]1\,;\,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions polynômes.

Propriété (admise) :

Toute fonction **dérivable** sur un intervalle I est **continue** sur I.

Remarque :

La réciproque de ce théorème est fausse : les fonctions valeur absolue et racine carrée, par exemple, ne sont pas dérivables en 0, mais sont continues en 0.

Remarques :

Ne pas confondre continuité et dérivabilité.

- Une fonction f est **continue en *a*** si la courbe $\mathscr{C}_f$ ne présente pas de saut en son point d'abscisse a.
- Une fonction f est **dérivable en *a*** si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente non verticale en son point d'abscisse a.

II. Théorème des valeurs intermédiaires

1) Cas général

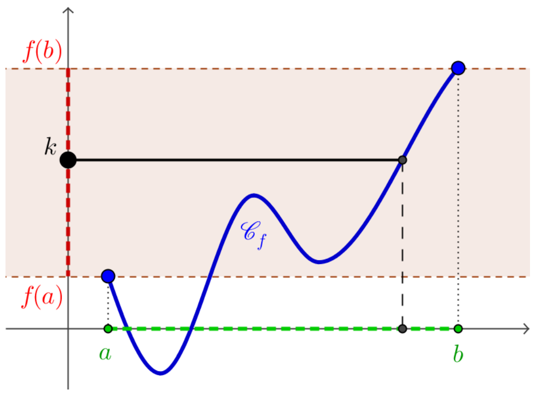
Propriété (admise) :

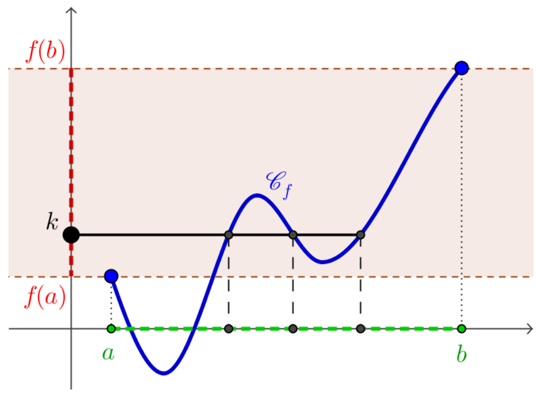
f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe **au moins** un réel c compris entre a et b, tel que $f(c)=k$.

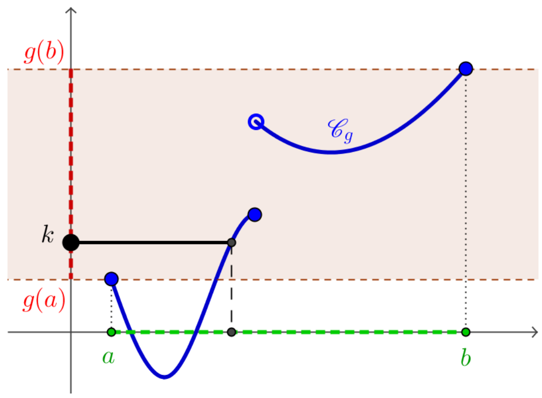
Exemples :

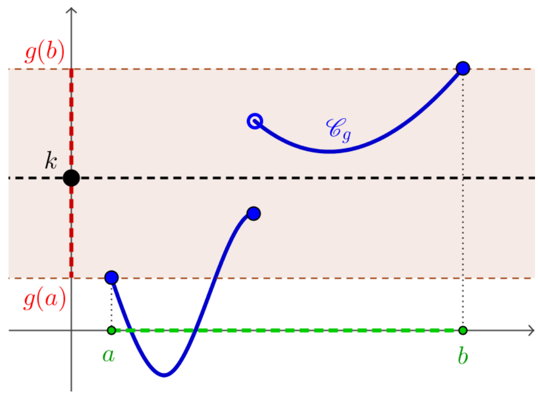
- f est continue sur $[a;b]$, toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ sont prises au moins une fois.





- g n'étant pas continue sur $[a;b]$, certaines valeurs comprises entre $g(a)$ et $g(b)$ ne sont pas atteintes par g.





Remarque :

La continuité permet de dire que des solutions existent.

2) Cas des fonctions monotones

Propriété :

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$ et k un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x)=k$ admet une **unique solution** c située dans l'intervalle $[a;b]$.

Démonstration :

Soit un réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Comme f est continue sur $[a;b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c de $[a;b]$ tel que $f(c)=k$. Il reste à prouver l'unicité.

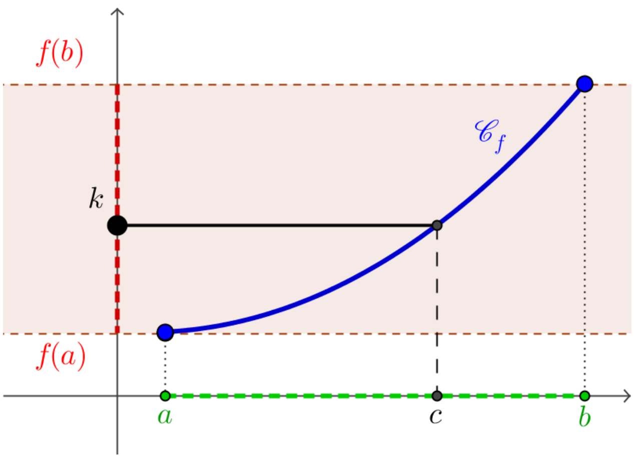
Dans le cas où la fonction f est strictement croissante sur $[a;b]$, on a :

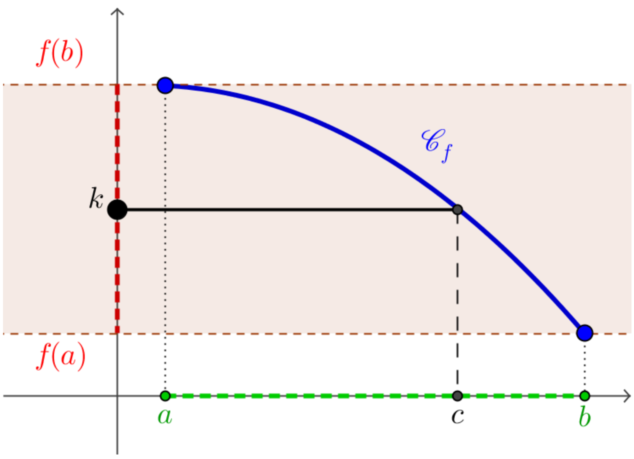
- pour tout réel x de $[a;c[$, $f(x)<f(c)$, c'est-à-dire $f(x)<k$
- pour tout réel x de $]c;b]$, $f(x)>f(c)$, c'est-à-dire $f(x)>k$

L'équation $f(x)=k$ n'admet donc pas d'autre solution que c dans l'intervalle $[a;b]$.

Dans le cas où la fonction f est strictement décroissante sur $[a;b]$, on raisonne de la même façon.

Exemples :





Remarques :

- Dans le cas particulier où 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, sous les hypothèses du théorème précédent, f prend une fois et une seule la valeur 0.

  Ceci signifie que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur $]a;b[$.
- Ce théorème s'étend au cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non bornés en remplaçant si besoin $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f en a et en b.
- Dans un **tableau de variation** les **flèches** obliques traduisent la **continuité** et la **stricte monotonie** d'une fonction sur un intervalle.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur ℝ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

$f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2)$

$f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = 2$

Sur $[2;4]$, la fonction f est continue (c'est une fonction polynôme) et strictement décroissante.

$f(2) = 5$ et $f(4) = -15$.

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[2;4]$.

3) Extension à d'autres intervalles

On généralise le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle ouvert.

Propriété :

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $]a;b[$ où a désigne un réel ou $-\infty$ et b désigne un réel ou $+\infty$.

On suppose que f admet des limites en a et b, finies ou infinies.

- Pour tout k compris entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a;b[$.
- Si, de plus, f est strictement monotone sur $]a;b[$, alors cette solution est unique.

Exemple :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

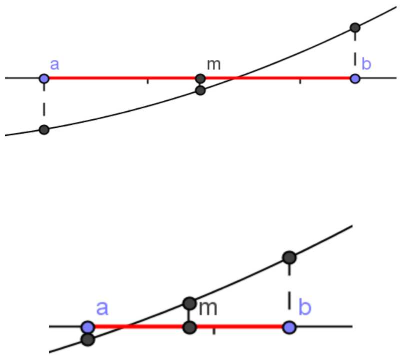
La fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^3 + 3x + 1$ est continue et strictement croissante sur ℝ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

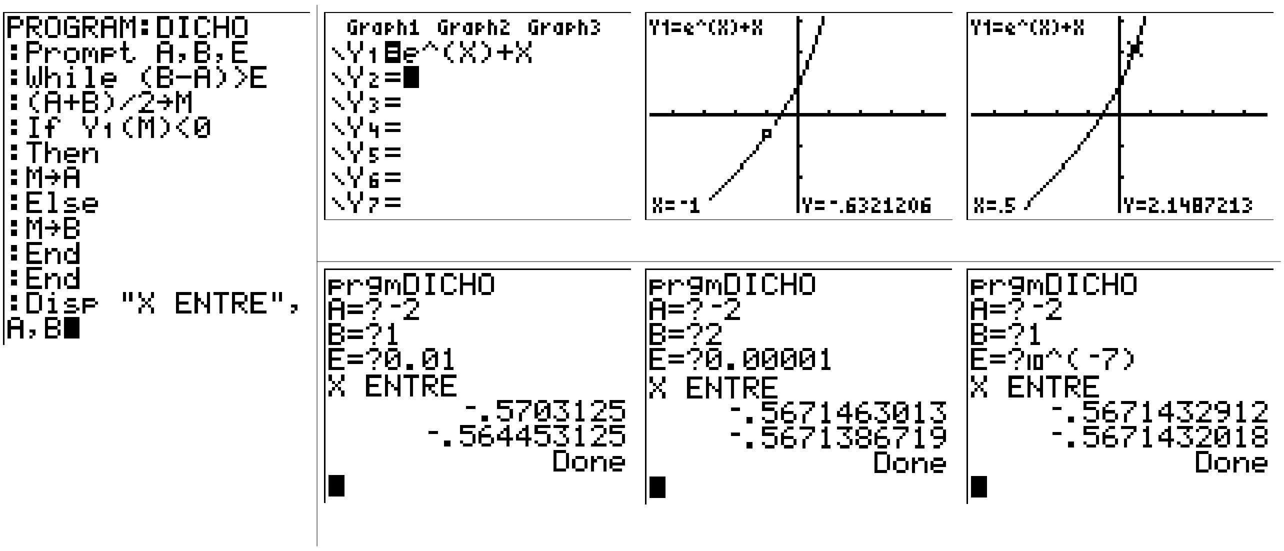
0 appartient à $]-\infty;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution x_0 sur ℝ.

Algorithme : approcher, à 10^{-n} près les solutions de l'équation $f(x)=k$ sur $[a;b]$.

Cas où la fonction est continue et strictement **croissante** sur $[a;b]$

```
Tant que b − a > 10⁻ⁿ faire
      m ← (a + b) / 2
      Si f(m) < k alors
            a ← m
      Sinon
            b ← m
      Fin Si
Fin Tant que
```

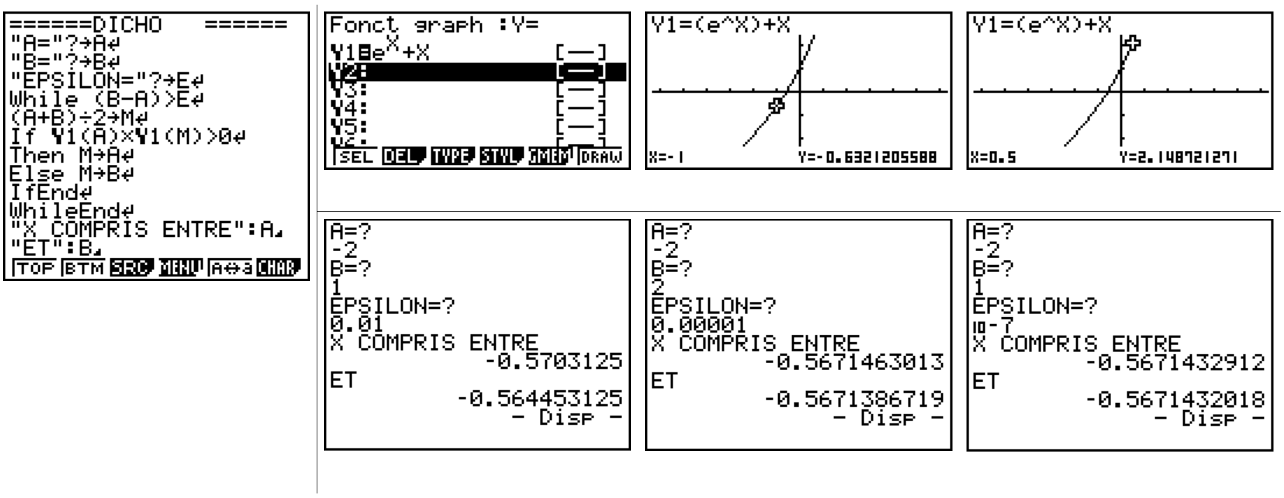




Algorithme : approcher, à 10^{-n} près les solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $[a;b]$.

Cas où la fonction est continue et strictement **monotone** sur $[a;b]$

```
Tant que b – a > 10^-n faire
      m ← (a + b) / 2
      Si f(a) × f(m) > 0 alors
            a ← m
      Sinon
            b ← m
      Fin Si
Fin Tant que
```



Python

```python
# On importe la fonction exponentielle
from math import exp

# On définit la fonction
def f(x):
    return exp(x) + x

# On implémente l'algorithme
def dichotomie(a, b, epsilon):
    while (b - a) > epsilon:
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    print("La solution appartient à l'intervalle ["+
          str(a)+";"+str(b)+"] avec une précision de", epsilon)
```

```
>>> dichotomie(-1,2,0.000001)
La solution appartient à l'intervalle [-0.5671436786651611;-0.5671429634094238]
avec une précision de 1e-06
>>>
```

III. Application aux suites

1) Limite de la composée d'une suite et d'une fonction

Propriété :

f est une fonction définie sur un intervalle I.

(v_n) est une suite dont tous les termes appartiennent à l'intervalle I.

b et c désignent soit des nombres, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = b$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = c$.

Exemple :

Cherchons la limite éventuelle de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{\dfrac{3n+2}{n+1}}$.

$u_n = \sqrt{v_n}$ avec $v_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$ et $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Cas particulier :

f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A;+\infty[$ et (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant A$, par $u_n = f(n)$.

La lettre L désigne soit un nombre, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$.

Exemple :

Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

$u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2) Théorème du point fixe

Propriété :

Soit une suite (u_n) définie par un premier terme et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ .

Si la fonction associée f est continue en ℓ , alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x)=x$.

Démonstration :

La suite (u_n) est convergente vers ℓ.

De plus, la fonction f est continue en ℓ. Donc $\lim\limits_{x \to l} f(x) = f(\ell)$.

Par composition, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(\ell)$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, on en déduit alors que $f(\ell) = \ell$.

Remarques :

- La condition de continuité de f en ℓ est indispensable. Comme ℓ n'est « à priori » pas connue, on prendra en pratique l'ensemble sur lequel la fonction f est continue.
- Si l'équation $f(x)=x$ admet plusieurs solutions, on choisira celle qui correspondra aux caractéristiques de la suite.