# Chapitre 7
# Complément sur la dérivation

## I. Approfondissement sur les dérivées

### 1) Fonction composée

**Définition :**

Soit $u$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$, à valeurs dans un intervalle $J$, et $g$ une fonction définie et dérivable sur $J$.

La **fonction composée** des fonctions $u$ et $g$, notée $g \circ u$, est définie sur $I$ par :

$$g \circ u(x) = g(u(x)) .$$

**Exemples :**

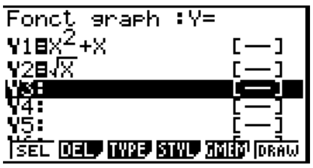
Soit $u$ *et* g les fonctions suivantes :

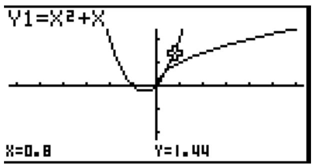
$u : I = [0;+\infty[ \ \to \ J = [0;+\infty[$ et $g : J = [0;+\infty[ \ \to \mathbb{R}$

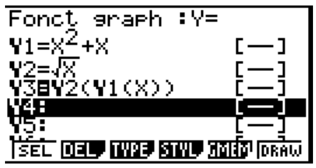
$x \mapsto x^2 + x$ $\qquad\qquad$ $x \mapsto \sqrt{x}$

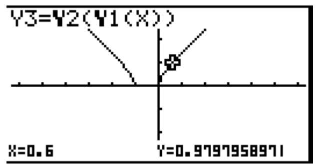
La fonction composée est la fonction $g \circ u : I \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(u(x)) = \sqrt{x^2+x}$$





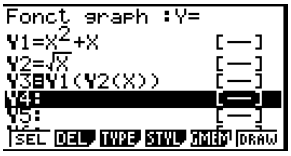


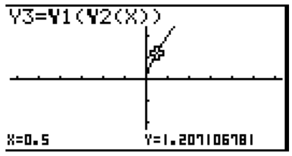



**Remarques :**

- Sur l'exemple précédent, $u \circ g$ est définie par : $u \circ g : [0;+\infty[ \ \to \ [0;+\infty[$

  $$x \mapsto x + \sqrt{x}$$






- Les propriétés précédentes sont des cas particuliers :
  - Pour $f(x) = \sqrt{u(x)}$

    $u : E \to \ ]0;+\infty[$ et $g : \ ]0;+\infty[ \ \to \mathbb{R}$

    $x \mapsto u(x)$ $\qquad\qquad$ $x \mapsto \sqrt{x}$

    La fonction $f$ peut s'écrire $f = g \circ u : E \to \mathbb{R}$

    $$x \mapsto \sqrt{u(x)}$$

- Pour $f(x)=(u(x))^n$

  $u: E \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \mapsto u(x)$ $\quad$ $x \mapsto x^n$

  La fonction $f$ peut s'écrire $f = g \circ u : E \to \mathbb{R}$

  $x \mapsto (u(x))^n$

- Pour $g(x)=f(ax+b)$

  $u: E \to \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \mapsto ax+b$ $\quad$ $x \mapsto f(x)$

  La fonction $g$ peut s'écrire $g = f \circ u : E \to \mathbb{R}$

  $x \mapsto f(ax+b)$

**Propriété : associativité de la composition de fonctions**

La composée de fonctions est associative.

Soit $u$, $v$ et $w$ trois fonctions vérifiant les conditions de définition requises alors :

$$w\circ(v\circ u) = (w\circ v)\circ u$$

**Exemple :**

Soit trois fonctions $u$, $v$ et $w$ définies par $u : x \mapsto x^2 - 2$ , $v : x \mapsto e^x$, $w : x \mapsto 1 - x$

- $w\circ v(x) = w(v(x)) = w(e^x) = 1 - e^x$

  et donc $(w\circ v)\circ u(x) = w\circ v(u(x)) = w\circ v(x^2 - 2) = 1 - e^{x^2-2}$
- $v\circ u(x) = v(u(x)) = v(x^2 - 2) = e^{x^2-2}$

  et donc $w\circ(v\circ u)(x) = w\circ(v\circ u(x)) = w\left(e^{x^2-2}\right) = 1 - e^{x^2-2}$

**Propriété : non commutativité de la composition de fonctions**

La composée de fonctions n'est pas commutative.

**Exemple :**

Soit trois fonctions $u$, $v$ et $w$ définies par $u : x \mapsto x^2 - 2$ , $v : x \mapsto e^x$

- $u\circ v(x) = u(v(x)) = u(e^x) = (e^x)^2 - 2 = e^{2x} - 2$
- $v\circ u(x) = v(u(x)) = v(x^2 - 2) = e^{x^2-2}$

Donc $u\circ v(x) \neq v\circ u(x)$.

## 2) Dérivée d'une fonction composée

**Propriété :**

Soit $u$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle *E*, à valeurs dans un intervalle *F* et *g* une fonction définie et dérivable sur *F*.

La fonction $f$ : $x \mapsto g(u(x))$ est dérivable en tout nombre réel *x* de *E* et sa dérivée est la fonction :

$$(g \circ u)' : x \mapsto g'(u(x)) \times u'(x) .$$

*Démonstration :*

Soit $x_0$, un réel de l'intervalle I. On veut montrer que $g \circ u$ est dérivable en $x_0$ donc que $\frac{(g \circ u)(x)-(g \circ u)(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $x_0$.

$$\frac{(g \circ u)(x)-(g \circ u)(x_0)}{x-x_0} = \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \times \frac{(g \circ u)(x)-(g \circ u)(x_0)}{u(x)-u(x_0)}$$

D'une part, $u$ étant dérivable en $x_0$, on sait que $\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$ tend vers $u'(x_0)$ quand $x$ tend vers $x_0$.

D'autre part, lorsque $x$ tend vers $x_0$, $u(x)$ tend vers $u(x_0)$ car $u$ est continue en $x_0$. (puisqu'elle est dérivable sur I).

De plus, comme $g$ est dérivable en $u(x_0)$, $\frac{g(u(x))-g(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)}$ tend vers $g'(u(x_0)) = (g' \circ u)(x_0)$ .

Donc :

$\frac{(g \circ u)(x)-(g \circ u)(x_0)}{x-x_0} = \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \times \frac{(g \circ u)(x)-(g \circ u)(x_0)}{u(x)-u(x_0)}$ tend vers $u'(x_0) \times g'(u(x_0))$ pour tout $x_0$ de I.

**Exemple :**

La fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ est la composée de la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x}$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, à valeurs dans $]0;+\infty[$, et de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.

On sait que $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$ .

La fonction $f$ est dérivable et sa dérivée est donnée par :

$$u'(x) \times g'(u(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times -\frac{1}{(\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

**Cas particuliers :**

- La fonction $f$, définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$, est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
- Si, pour tout $x$ de I, $u(x) > 0$, alors la fonction $f$ définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
- Soit $n$, un entier relatif non nul, et $f$ la fonction définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$.
  - Si $n \geqslant 1$, alors $f$ est dérivable sur I et $f'(x) = n\,u'(x)\,(u(x))^{n-1}$.
  - Si $n \leqslant -1$ et si $u$ ne s'annule pas sur I, alors $f$ est dérivable sur I et

$$f'(x) = n\,u'(x)\,(u(x))^{n-1}.$$

## Monotonie d'une fonction composée

**Propriétés :**

- Si $g$ et $u$ sont de **même monotonie** alors la fonction $g \circ u$ est **croissante**.
- Si $g$ et $u$ sont de **monotonie contraire** alors la fonction $g \circ u$ est **décroissante**.

*Démonstration :*

La fonction dérivée de la fonction $g \circ u$ est la fonction notée $(g \circ u)'(x) = (g'(u(x)) \times u'(x)$.

- Si $u$ et $g$ sont croissantes alors $u'$ et $g'$ sont positives et $(g \circ u)'$ l'est aussi.

  Si $u$ et $g$ sont décroissantes alors $u'$ et $g'$ sont négatives et $(g \circ u)'$ est positive.

  Dans les deux cas, $g \circ u$ est croissante.
- Si $u$ est croissante et $g$ est décroissante alors $u'$ est positive et $g'$ est négative donc $(g \circ u)'$ est négative.

  Si $u$ est décroissante et $g$ est croissante alors $u'$ est négative et $g'$ est positive donc $(g \circ u)'$ est négative.

  Dans les deux cas, $g \circ u$ est décroissante.

## 3) Dérivée seconde

**Définitions :**

Soient $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I et $f'$ sa fonction dérivée.

La fonction $f$ est **deux fois dérivable** sur I si $f'$ est elle-même dérivable sur I.

On note $f''$ la dérivée de $f'$. Elle est appelée **dérivée seconde** de $f$.

**Exemple :**

Soit $f$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x + e^x$.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2 + 5 + e^x$.

$f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $(f')'(x) = 6x + e^x$.

$f$ est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est définie par $f''(x) = 6x + e^x$.

# II. Convexité : approche graphique

## 1) Fonctions convexes et concaves

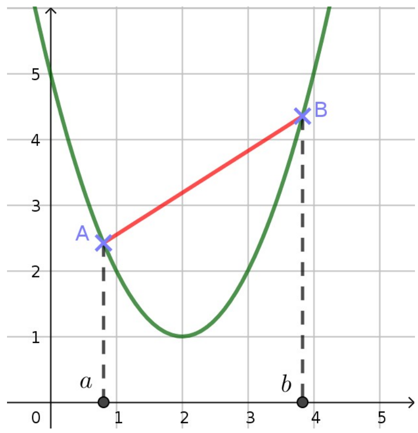
**Définition :**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

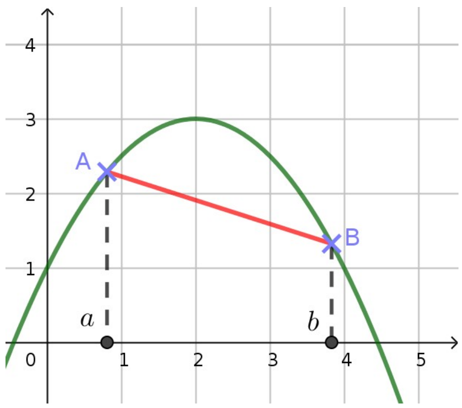
- $f$ est **convexe** sur I si, pour tous réels $a$ et $b$ de I, la portion de la courbe $\mathscr{C}$ située entre les points A($a$ ; $f(a)$) et B($b$ ; $f(b)$) est **en dessous** de la sécante (AB).
- $f$ est **concave** sur I si, pour tous réels $a$ et $b$ de I, la portion de la courbe $\mathscr{C}$ située entre les points A($a$ ; $f(a)$) et B($b$ ; $f(b)$) est **au-dessus** de la sécante (AB).

**Exemples :**

- La fonction représentée ci-dessous est convexe :




- La fonction représentée ci-dessous est concave :




- La fonction carré et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0 ; +\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $]-\infty ; 0[$ et convexe sur $]0 ; +\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $]-\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.

**Remarque :**

Étudier la convexité d'une fonction revient à déterminer sur quel(s) intervalle(s) elle est convexe et sur quel(s) intervalle(s) elle est concave.

**Propriétés :**

- Si $f$ est une fonction **convexe** sur un intervalle I alors, pour tous réels $x$ et $y$ de I et pour tout $t \in [0 ; 1]$ :

$$f(t\,x + (1-t)\,y) \leqslant t\,f(x) + (1-t)\,f(y)$$

- Si $f$ est une fonction **concave** sur un intervalle I alors, pour tous réels $x$ et $y$ de I et pour tout $t \in [0 ; 1]$ :

$$f(t\,x + (1-t)\,y) \geqslant t\,f(x) + (1-t)\,f(y)$$

*Démonstration :*

Soient deux réels $x$ et $y$ et soit $t$ un réel de $[0 ; 1]$.

Soient $A(x ; f(x))$ et $B(y ; f(y))$.

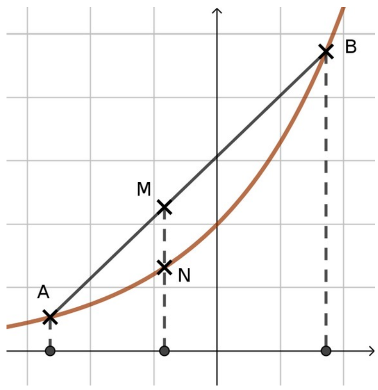
Alors le point $M(t\,x + (1-t)\,y \; ; t\,f(x) + (1-t)\,f(y))$ appartient au segment [AB], sécante de $\mathscr{C}_f$.

$f$ étant convexe, cette sécante est située au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

M est donc située au-dessus du point N de coordonnées

$(t\,x + (1-t)\,y \; ; \; f(t\,x + (1-t)\,y))$.

D'où $f(t\,x + (1-t)\,y) \leqslant t\,f(x) + (1-t)\,f(y)$.




**Propriété :**

$f$ est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

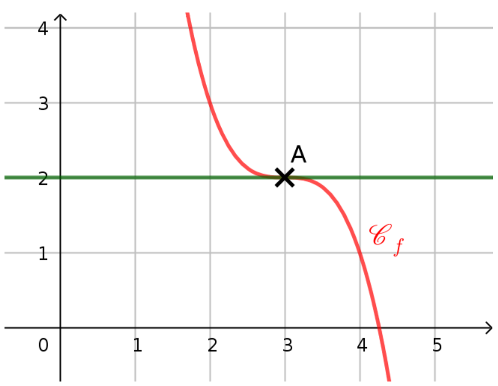
## 2) Point d'inflexion

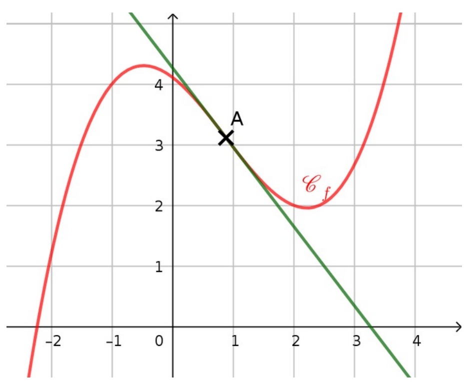
**Définition :**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et A un point de $\mathscr{C}$.

A est un **point d'inflexion** de $\mathscr{C}$ si $\mathscr{C}$ admet une tangente en A et si $\mathscr{C}$ traverse cette tangente en A.

**Exemples :**




**Remarque :**

En l'abscisse d'un point d'inflexion A de la courbe représentative de $f$, la fonction $f$ change de convexité.

# III. Convexité des fonctions dérivables

## 1) Caractérisation de la convexité

**Propriétés :**

Soit $f$ une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I.

On note $f'$ sa dérivée et $f''$ sa dérivée seconde.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $f$ est convexe sur l'intervalle I.
- $f''$ est positive sur l'intervalle I.
- $f'$ est croissante sur I.

**Exemple :**

On considère la fonction polynôme $f$, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

La fonction $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f''(x) = 6$.

La fonction $f''$ est positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

## *2)* Convexité et tangente

**Propriétés :**

Soit $f$ une fonction définie et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

Soit I un intervalle sur lequel $f$ est dérivable.

- Sur l'intervalle I, $f$ est convexe si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.
- Sur l'intervalle I, $f$ est concave si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes.

*Démonstration :*

On suppose $f$ convexe sur I. Soit $x_0 \in$ I.

- L'équation de la tangente $T_{x_0}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0$ est :

  $$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

  Soit $\Phi$ la fonction définie sur I par la différence entre la fonction et sa tangente.

  $\Phi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) = f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)\,x_0 - f(x_0)$.

  Alors $\Phi$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant $\Phi'$ sa dérivée, on obtient :

  $\Phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0)$.

- La fonction $f$ est convexe sur I, donc la fonction $f'$ est croissante sur I, donc la fonction $\Phi'$ l'est aussi.

  Or $\Phi'(x_0) = 0$, donc pour tout réel $x$ de I :

  - si $x \leqslant x_0$, alors $\Phi'(x) \leqslant 0$
  - si $x \geqslant x_0$, alors $\Phi'(x) \geqslant 0$

Donc, la fonction $\Phi$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,x_0] \cap I$ et croissante sur $]x_0\,;\,+\infty\,[\cap I$.

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $\Phi'(x)$ | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ |
| $\Phi(x)$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |

De plus, $\Phi(x_0) = 0$, donc 0 est le minimum de $\Phi$ sur I, donc la fonction $\Phi$ est positive sur I.

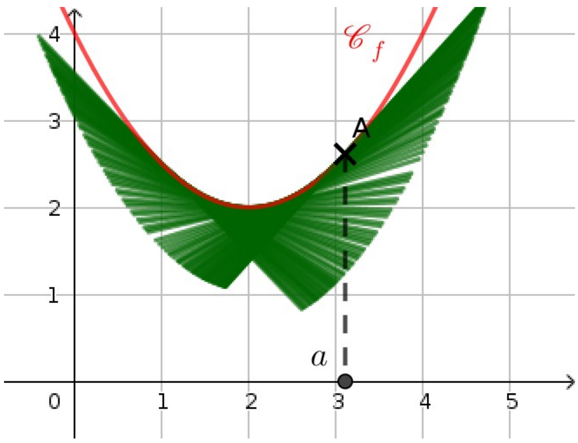
Donc, pour tout réel $x$ appartenant à I, $f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) \geqslant 0$.

Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $T_{x_0}$ sur l'intervalle I.

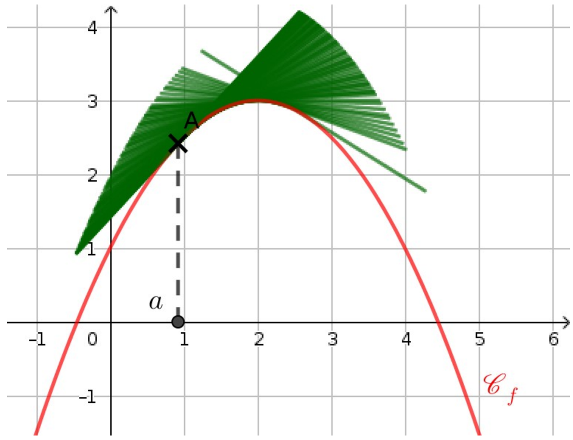
- En conclusion, sur I, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

**Exemple :**

La fonction $f$ représentée ci-dessous est convexe.




La fonction $g$ représentée ci-dessous est concave.




**Remarque :**

Une fonction croissante et convexe sur un intervalle I est une fonction qui croît « de plus en plus vite » sur I. Si elle est dérivable sur I, les pentes des tangentes à sa courbe représentative augmentent quand les abscisses augmentent.

Pour une fonction croissante et concave, c'est le contraire : elle croît « de moins en moins vite ».

## 3) Point d'inflexion

**Propriétés :**

Soit $f$ une fonction définie et deux fois dérivables sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et $a$ un réel appartenant à I.

- Si $f'$ change de sens de variation en $a$, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $a$.
- Si $f''$ s'annule et change de signe en $a$, alors $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $a$.