Chapitre 4
Combinatoire et dénombrement

I. Ensemble

1) Définition

Définition :

Un **ensemble** E est une collection d'objets distincts x qu'on appelle **éléments**.

On dit alors que x appartient à E et on note $x \in E$

Exemples :

- $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ est un ensemble à 3 éléments
- Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ont une infinité d'éléments.

Remarques :

- L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et se note $\varnothing$.
- L'ordre n'intervient pas : $\{a\ ;\ b\} = \{b\ ;\ a\}$.
- Il n'y a pas répétition d'un élément : $\{a\ ;\ a\} = \{a\}$.

2) Partie

Définition :

On appelle **partie** d'un ensemble E, un ensemble F tel que tous les éléments de F appartiennent aussi à E.

On dit que F est **inclus** dans E et on note $F \subset E$.

F est un **sous-ensemble** de E.

Exemple :

L'ensemble $F = \{a\ ;\ b\}$ est inclus dans l'ensemble $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$. F est une partie de E.

Définitions :

- La **réunion** $A \cup B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B.
- L'**intersection** $A \cap B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A **et** à B.

Exemple :

Avec $A = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e\}$ et $B = \{b\ ;\ e\ ;\ f\ ;\ g\}$.

$A \cup B = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e\ ;\ f\ ;\ g\}$ et $A \cap B = \{b\ ;\ e\}$.

Remarques :

- Une partie à un élément s'appelle un singleton, une partie à 2 éléments une paire.
- L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble de toutes les parties de E, c'est-à-dire tous les sous-ensembles possibles de E.

Exemple :

L'ensemble des parties de $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ est :

$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing\ ;\ \{a\}\ ;\ \{b\}\ ;\ \{c\}\ ;\ \{a\ ;\ b\}\ ;\ \{a\ ;\ c\}\ ;\ \{b\ ;\ c\}\ ;\ E\}$

II. Principe additif et multiplicatif

1) Ensemble fini et cardinal

Définition :

Soit n un entier naturel.

Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que E est un **ensemble fini**.

Le nombre n d'éléments de E est appelé **cardinal** de E, noté Card(E).

Exemple :

$E = \{a\ ;\ e\ ;\ i\ ;\ o\ ;\ u\ ;\ y\}$ est un ensemble fini de six éléments et Card(E) = 6.

Remarques :

- $\text{Card}(\varnothing) = 0$
- Certains ensembles ne sont pas finis : l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'ensemble des réels de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, …

2) Principe additif

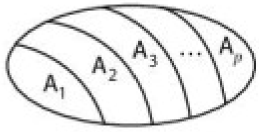
Définition :

Deux ensembles sont **disjoints** lorsque $A \cap B = \varnothing$

Propriété :

Soit A_1, A_2, … A_p , p ensembles disjoints. On a :

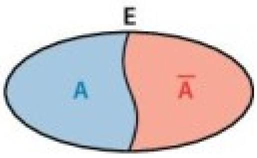
$$\text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_p)$$



Corollaire :

Soit A une partie d'un ensemble fini E et $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E.

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$$



3) Principe multiplicatif

Définition :

E et F sont deux ensembles non vides.

Le **produit cartésien** de E par F, noté E × F, est l'ensemble des couples $(x ; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$.

Exemple :

Soient $E = \{a ; b ; c\}$ et $F = \{1 ; 2\}$.

Alors $E \times F = \{(a ; 1) ; (a ; 2) ; (b ; 1) ; (b ; 2) ; (c ; 1) ; (c ; 2)\}$.

Alors $F \times E = \{(1 ; a) ; (2 ; a) ; (1 ; b) ; (2 ; b) ; (1 ; c) ; (2 ; c)\}$.

Propriété :

E et F sont deux ensembles finis et non vides.

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$$

Définition :

Soient k un entier supérieur ou égal à 2 et E_1, E_2, … , E_k, k ensembles non vides.

- Toute liste ordonnée $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_k)$ avec $x_i \in E_i$ pour i allant de 1 à k, est appelée ***k*-uplet**.
- L'ensemble de ces k-uplets est le **produit cartésien** $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$.

Remarques :

- Un 2-uplet est un **couple** et un 3-uplet est un **triplet**.
- L'ordre intervient $(a ; b) \neq (b ; a)$.
- Les éléments peuvent être identiques : $(a ; a)$ existe.

Propriété :

Soient k un entier supérieur ou égal à 2 et E_1, E_2, … , E_k, k ensembles non vides.

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k) = \mathrm{Card}(E_1) \times \mathrm{Card}(E_2) \times \dots \times \mathrm{Card}(E_k)$$

III. *k*-uplets d'un ensemble fini

1) Nombre de *k*-uplets d'un ensemble à *n* éléments

Définition :

Soit k un entier naturel non nul et E un ensemble non vide.

Un ***k*-uplet d'éléments de E** est un élément du **produit cartésien** $E \times E \times \dots \times E = E^k$.

Exemple :

$\{a ; b ; r ; a ; c ; a ; d ; a ; b ; r ; a\}$ est un 11-uplet de l'ensemble des 26 lettres :

$$E = \{a ; b ; c ; \dots ; z\}.$$

Propriété :

Soient n et k deux entiers naturels non nuls et E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre de k-uplets de E est n^k, soit $\mathrm{Card}(E^k) = n^k$.

Exemple :

On dispose de trois boîtes notées A, B, C et cinq jetons de couleurs différentes que l'on doit ranger dans les boîtes. On note $T = \{A ; B ; C\}$ l'ensemble des boîtes. Les différents rangements possibles sont des 5-uplets de T. Par exemple, $\{A ; B ; B ; A ; C\}$ signifie que l'on a rangé le premier jeton dans la boîte A, le deuxième dans la boîte B, …

Il y a $3^5 = 243$ rangements possibles.

2) *k*-uplets d'éléments distincts d'un ensemble

Définition :

Soient E un ensemble fini de cardinal n et k un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

Un **arrangement** de k éléments de E (ou ***k*-arrangement**) est un k-uplet d'éléments distincts de E.

Exemple :

Si E = {1 ; 2 ; 3 ; 4}, alors (1 ; 3 ; 4) et (1 ; 4 ; 3) sont deux arrangements de trois éléments de E.

Ce sont des 3-arrangements de E.

Remarque :

Un arrangement de E peut être interprété comme un tirage avec ordre et sans remise des éléments de E.

Propriété :

Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E est :

$$n(n-1)\dots(n-k+1) \quad (k \text{ facteurs})$$

Exemple :

On dispose de trois jetons et de cinq boîtes notées A, B, C, D et E. On doit ranger les jetons dans les boîtes, une boîte ne pouvant pas contenir deux jetons. On dispose de cinq possibilités pour le premier jeton, de quatre possibilités pour le deuxième et de trois possibilités pour le troisième.

Les rangements possibles sont donc les 3-uplets d'éléments deux à deux distincts de l'ensemble T = $\{A\ ; B\ ; C\ ; D\ ; E\}$. Leur nombre est 5 × 4 × 3 = 60. Donc $A_5^3 = 60$.

Calculatrice :

Remarque :

Le nombre de k-arrangements de E est égal à $A_n^k = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$.

Définition :

On appelle **permutation** d'un ensemble E à n éléments tout n-uplets d'éléments deux à deux distincts de E.

Exemple :

Les permutations de l'ensemble E = $\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ sont :

$(a\ ;\ b\ ;\ c)$, $(a\ ;\ c\ ;\ b)$, $(b\ ;\ c\ ;\ a)$, $(b\ ;\ a\ ;\ c)$, $(c\ ;\ b\ ;\ a)$, $(c\ ;\ a\ ;\ b)$.

Propriété :

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ($n \geqslant 1$) est le nombre noté $n\,!$ (qui se lit **factorielle *n*** ou ***n* factorielle**) défini par :

$$n\,! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

Remarques :

- On convient que $0\,! = 1$.
- Le nombre de k-arrangements de E est égal à $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
- Une permutation est un n-arrangement.

IV. Parties d'un ensemble et combinaisons

1) Nombre de parties d'un ensemble

Propriété :

Soit n un entier naturel.

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble $\{0\ ;\ 1\}$, c'est-à-dire 2^n.

Démonstration :

Pour constituer une partie de E, il y a deux choix pour chaque élément de E : l'incorporer dans cette partie ou pas. Puisque E possède n éléments, cela donne 2^n parties possibles.

Remarque :

On appelle mot de longueur n sur l'alphabet A = $\{a\ ;\ b\}$ un n-uplet d'éléments de A.

Par exemple, $\{a\ ;\ b\ ;\ b\ ;\ a\}$ est un mot de longueur 4 sur l'alphabet A.

Il y a 2^n mots de longueur n.

2) Combinaison

Définition :

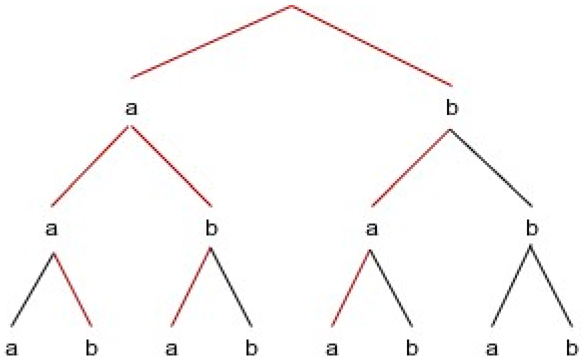
Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et E un ensemble fini de cardinal n.

On appelle **combinaison de k éléments de E** toute partie de E ayant k éléments.

Exemple :

On considère les mots de longueur 3 formés avec les lettres de l'alphabet A = $\{a\ ;\ b\}$.

Construire un mot contenant exactement deux lettres a revient à déterminer la position des deux lettres a dans le mot de trois lettres, c'est-à-dire une combinaison de deux éléments de l'ensemble $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$. Il y en a trois.



Propriété :

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.

Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments, noté $\binom{n}{k}$ est donné par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Remarque :

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont également appelés **coefficients binomiaux** et se lisent « k parmi n ».

Exemples :

- Dans l'arbre précédent, il y a trois chemins contenant exactement deux lettres a : $\binom{3}{2} = 3$.
- $\binom{33}{5} = \frac{33 \times 32 \times ... \times 29}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 237336$

Calculatrice :

V. Propriétés des combinaisons

1) Propriétés

Propriétés :

Soit n un entier naturel.

- $\binom{n}{0}=1$. Dans un ensemble à n éléments, il existe une seule partie à 0 élément : la partie vide.
- $\binom{n}{1}=n$. Dans un ensemble à n éléments, il y a n parties ayant un élément.
- $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$. Dans un ensemble à n éléments, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ parties ayant deux éléments.
- $\binom{n}{n}=1$. Dans un ensemble à n éléments, il y a une seule partie à n éléments : l'ensemble lui-même.
- Pour tous entiers n et k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

  Dénombrer les parties à k éléments revient à dénombrer les parties à $(n-k)$ éléments qui en sont les complémentaires.

Exemple :

$\binom{10}{7}=\binom{10}{3}$. Il y a donc autant de façons de choisir sept objets parmi dix que trois objets parmi dix.

Propriété :

Pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Démonstration :

Soit E un ensemble fini à n éléments.

Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note E_k l'ensemble des parties de E composées de k éléments. On a ainsi $\text{Card}(E_k) = \binom{n}{k}$. Les E_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est $\mathscr{P}(E)$.

Ainsi,

$2^n = \text{Card}(\mathscr{P}(E)) = \text{Card}(E_0 \cap E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = \text{Card}(E_0) + \text{Card}(E_1) + \ldots + \text{Card}(E_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

2) Relation et triangle de Pascal

Propriété :

Pour tous entiers naturels $n \geqslant 2$ et k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Démonstration :

Soit E un ensemble contenant n éléments et k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

$\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments de E.

Soit a un élément de E.

Parmi toutes les parties à k éléments de E, il y en a deux sortes :

- celles qui contiennent l'élément a.

  Dénombrer ces parties revient à déterminer le nombre de combinaisons de $(k-1)$ éléments d'un ensemble à $(n-1)$ éléments. Leur nombre est égal à $\binom{n-1}{k-1}$.

- celles qui ne contiennent pas l'élément a.

  Dénombrer ces parties revient à déterminer le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à $(n-1)$ éléments. Leur nombre est égal à $\binom{n-1}{k}$.

Le principe additif permet de conclure que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Triangle de Pascal

On peut ainsi calculer les $\binom{n}{k}$ à l'aide du tableau ci-dessous, appelé **triangle de Pascal**.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
…									

À l'intérieur de la ligne n et de la colonne k, on lit l'entier $\binom{n}{k}$.

<u>**Remarque :**</u>

Pour tous réels a et b et pour tout entier $n \geqslant 1$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

La formule ainsi obtenue est appelée formule du binôme de Newton.