Chapitre 5

Vecteurs

I. Vecteur

1) Translation

Définition :

Soit A et B deux points distincts du plan.

La **translation** du plan **qui transforme A en B** est appelé **translation de vecteur** $\vec{AB}$.

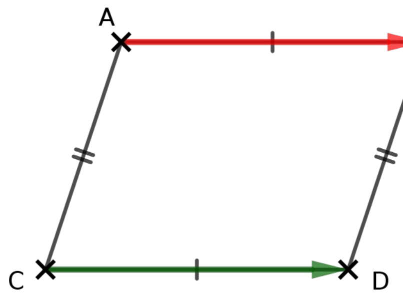
Le vecteur $\vec{AB}$ a pour **direction** celle de la droite (AB), pour **sens** celui de A vers B et pour **norme** la longueur AB.

Exemple :

Image D d'un point C par la translation de vecteur $\vec{AB}$.

1er cas : $C \notin (AB)$

D est le point tel que ABDC est un parallélogramme.



2^{e} cas : $C \in (AB)$

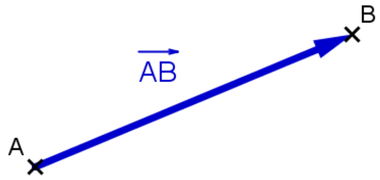
D est le point de (AB) tel que AB = CD et tel que le sens de C vers D soit le même que celui de A vers B.

2) Notion de vecteur

- La notation $\vec{AB}$ se lit « vecteur AB ».

  Le vecteur $\vec{AB}$ est représenté par une flèche.

  A est l'**origine** du vecteur et B son **extrémité**.



- Si A et B sont confondus, $\vec{AB}$ s'écrit $\vec{AA}$.

  On dit que $\vec{AA}$ est le **vecteur nul** noté $\vec{0}$.

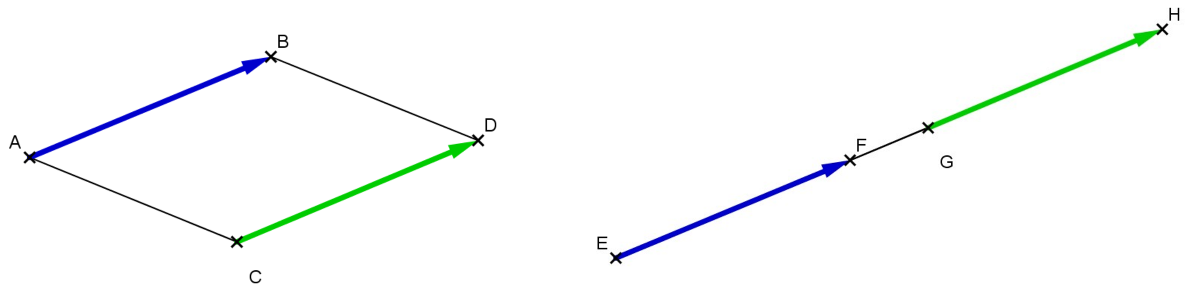
  Ainsi $\vec{AA} = \vec{0}$. Le vecteur nul n'a pas de direction.

3) Égalité de vecteurs

Définition :

L'égalité de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ non nuls se définit en disant qu'ils ont :

- même direction : (AB) et (CD) sont parallèles
- même sens
- même longueur



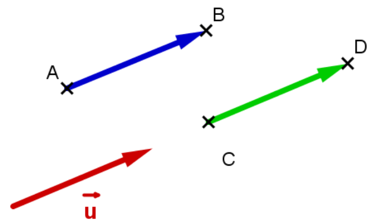
Propriété :

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère AB**DC** est un **parallélogramme** (éventuellement aplati).

Remarques :

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow [AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.
- On peut aussi utiliser une lettre pour désigner un vecteur.

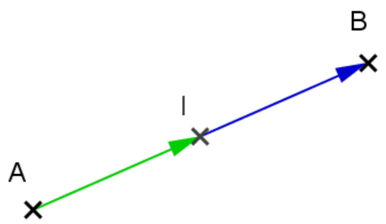
Si $\vec{u}$ est représenté par un vecteur $\overrightarrow{AB}$, on écrit $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$
$\vec{u}$ désignera tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ …. sont des représentants de $\vec{u}$.



Propriété :

Soit trois points A, I et B.

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ si, et seulement si, I est le milieu de $[AB]$.



II. Somme de vecteurs

1) Définition

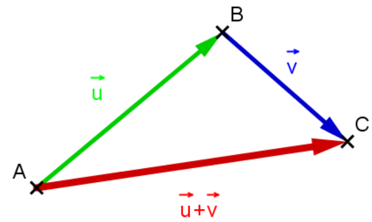
Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

La somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

Exemple :

En enchaînant ces deux translations, un point A a pour image le point B vérifiant $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et le point B a pour image le point C avec $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.



Par définition, le point C est l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

2) Relation de Chasles

Propriété :

Quels que soient les points A, B et C du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

Exemple :

Soient M, N et P trois points quelconques.

- $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$
- $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{MM}=\vec{0}$

3) Règle du parallélogramme

Propriété :

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de même origine A.

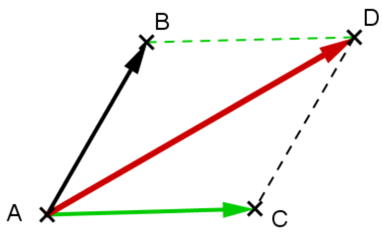
On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ si, et seulement si, D est le point tel que AB**DC** soit un parallélogramme.

Démonstration :

- Si $ABDC$ est un parallélogramme on a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$, en utilisant la relation de Chasles, on en déduit que :

  $$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$

- Réciproquement, si $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, comme $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, alors $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ et ABDC est un parallélogramme.



Propriétés :

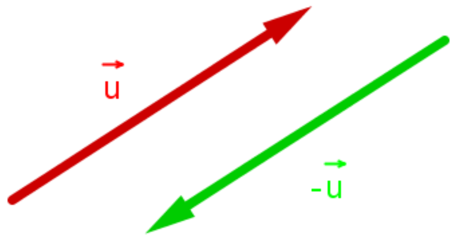
$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$; $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$; $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

4) Opposé d'un vecteur

Définition :

L'**opposé** du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur, noté $-\vec{u}$, tel que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

Un vecteur non nul et son opposé ont la même direction, le même norme, mais ont des **sens contraires**.



Exemple :

Soient A et B deux points.

On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$, ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.

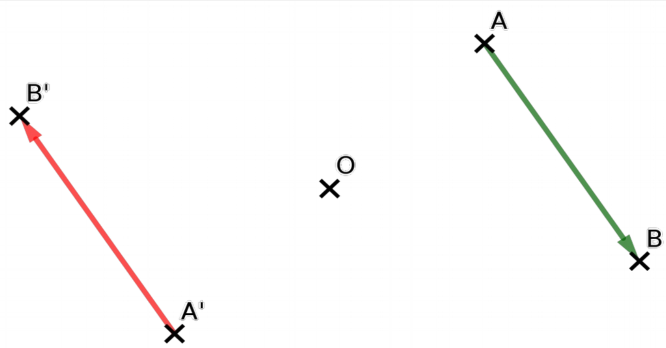
On a $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

Remarque :

La différence $\vec{u}-\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+(-\vec{v})$.

Propriété :

Si une symétrie centrale de centre O transforme un point A en un point A' et un point B en un point B', alors $\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$



III. Vecteur et coordonnées

Le plan est muni d'un repère (O ; I, J).

En posant $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$, le repère (O ; I, J) peut aussi s'écrire (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

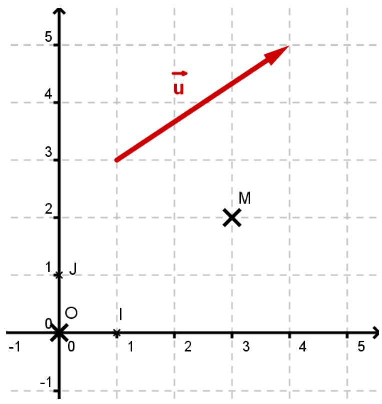
1) Coordonnées d'un vecteur

Définition :

Les **coordonnées d'un vecteur** $\vec{u}$ sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

Exemple :

Les coordonnées de M sont (3 ; 2) donc, par définition, les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.



Remarque :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), il existe un unique couple de réel (x ; y) tel que $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$

$\vec{u}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ signifie que les coordonnées de $\vec{u}$ sont (x ; y). On utilise aussi la notation $\vec{u}$ (x ; y).

Remarques :

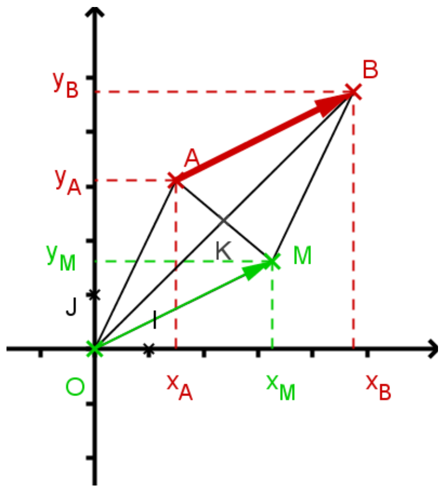
- Le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
- Si $\vec{u}$ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors : $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow x=x'$ **et** $y=y'$

Propriété :

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

On note $\overrightarrow{AB}$ $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

Démonstration :



Par définition, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ où M est le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Il s'agit donc de prouver que :
$x_M - x_O = x_M = x_B - x_A$ et $y_M - y_O = y_M = y_B - y_A$

Or $OMBA$ est un parallélogramme, donc $[AM]$ et $[OB]$ ont le même milieu K.
Comme K est le milieu de $[AM]$, $2x_K = x_M + x_A$.
De plus, K est le milieu de $[OB]$ donc $2x_K = x_B + x_O = x_B + 0 = x_B$.
On a donc $x_M + x_A = x_B$ et, par conséquent, $x_M = x_B - x_A$
On montre de même que $y_M = y_B - y_A$

<u>Exemple :</u>

Soient $A(3;-4)$ et $B(5;-1)$, on a donc $x_B - x_A = 5 - 3 = 2$ et $y_B - y_A = -1 - (-4) = 3$ donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) Propriétés

<u>Propriétés :</u>

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux si, et seulement si leurs coordonnées sont égales.
- ABCD est un parallélogramme ⇔ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ⇔ $x_B - x_A = x_C - x_D$ **et** $y_B - y_A = y_C - y_D$.

3) Somme de vecteurs

<u>Propriétés :</u>

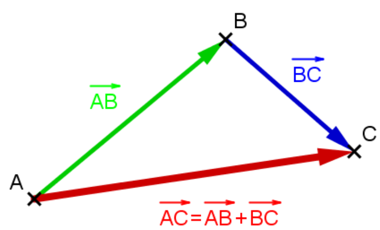
Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

Démonstration :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
On choisit un point $A(x_A; y_A)$ et les points $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
On a : $x = x_B - x_A$ et $y = y_B - y_A$
$x' = x_C - x_B$ et $y' = y_C - y_B$
On additionne les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
$$x + x' = (x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_B - x_A + x_C - x_B = x_C - x_A$$
$$y + y' = (y_B - y_A) + (y_C - y_B) = y_B - y_A + y_C - y_B = y_C - y_A$$
On obtient les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire celles du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



Exemples :

- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$. $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2+4\\-5+7\end{pmatrix}$ soit $\vec{w}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.
- Soit $A(-2;4)$ et $B(3;-2)$.
  Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
  $$x_{\overrightarrow{AB}}=x_B-x_A=3+2=5 \text{ et } y_{\overrightarrow{AB}}=y_B-y_A=-2-4=-6$$
  donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$.