Chapitre 10

Probabilités

I. Loi de probabilité

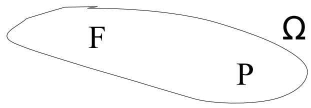
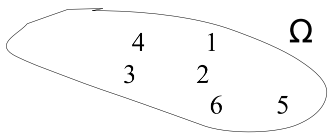
1) Vocabulaire

Définitions :

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles sans savoir à l'avance celui qu'on obtiendra.
- Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire s'appelle une **issue**.
- L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** de l'expérience.

  Il est généralement noté Ω.

Exemples :

Expérience aléatoire	*Univers*	
Lancer d'une pièce	Ω = {P ; F}	
Lancer d'un dé cubique	Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}	

Remarque :

Dans le cas général, on note les issues e_1, e_2, e_3, … , e_n et Ω = { e_1 ; e_2 ; e_3 ; … ; e_n }.

2) Loi de probabilité

Définitions :

Définir une **loi de probabilité** (ou distribution de probabilité) sur un univers Ω, c'est associer à chacune des **issues** e_i, les **probabilités** correspondantes p_i, qui sont des nombres positifs ou nul dont la somme est **égale à 1**.

Issue	e_1	e_2	e_3	…	e_n
Probabilité	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Exemple :

Si le dé cubique est équilibré (chaque face à autant de chances qu'une autre d'apparaître).

Donc $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6$ et puisque $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$.

On a donc :

e_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition :

Dans le cas où l'on associe à chacune des n issues d'une expérience aléatoire la même probabilité p, on parle de **loi équirépartie**.

On a alors $p=\frac{1}{n}$.

Démonstration :

$p+p+p+...+p=1$, donc $np=1$ et $p=\frac{1}{n}$.

3) Modélisation d'une expérience aléatoire

Définition :

Modéliser une expérience aléatoire dont les issues constituent l'univers Ω, c'est choisir une loi de probabilité sur E qui représente **au mieux** la probabilité qu'ils ont de se réaliser.

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire : « Lancer de deux pièces simultanément ».

Les issues possibles sont : Pile et Pile (PP), Pile et Face (PF), Face et Face (FF)

Il existe différentes manières de choisir un modèle.

<table>
<tr><td></td><td>Modèle 1
On ne distingue pas les pièces</td><td>Modèle 2
On distingue les pièces</td></tr>
<tr><td>Description</td><td>Loi équirépartie sur $E=${PP; FP; FF}</td><td>Loi équirépartie sur $E=${PP; FP; PF; FF}</td></tr>
<tr><td>Loi de probabilité</td><td><table><tr><td>Issue</td><td>P P</td><td>P F</td><td>F F</td></tr><tr><td>Probabilité</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>Issue</td><td>F F</td><td>P F</td><td>F P</td><td>P P</td></tr><tr><td>Probabilité</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Si l'on considère le modèle 1 on vérifie que la probabilité de tirer Pile et Pile est de $\frac{1}{3}$.

Si l'on considère le modèle 2 on vérifie que la probabilité de tirer Pile et Pile est de $\frac{1}{4}$.

4) Loi des grands nombres

Propriété :

Si on **reproduit**, dans des conditions identiques, une **expérience aléatoire** un grand nombre de fois, on constate que la **distribution de fréquences** des issues se « **stabilise** » autour de la **loi de probabilité** sur l'univers Ω.

Exemple :

On répète 10 000 fois l'expérience :

« Lancer de deux pièces simultanément ».

Voici la distribution de fréquences des issues :

Issue	PP	PF	FF
Fréquence	0,2519	0,4991	0,2490

Cette propriété nous permet donc de valider où d'invalider un modèle.

Dans l'exemple ci-dessus le modèle 2 est le mieux adapté à l'expérience aléatoire.

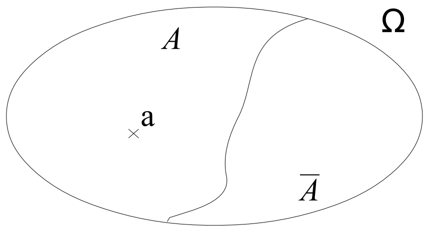
II. Probabilité d'un événement

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

1) Notion d'événement

Définitions :

- Un **événement** ***A*** est une partie (ou un sous-ensemble) de l'univers Ω.
- L'**événement contraire** de *A*, noté $\overline{A}$ est la partie constituée de toutes les issues de Ω qui ne sont pas dans *A*.
- Un **événement élémentaire** est une partie de Ω qui ne contient qu'une seule issue.



$A \subset \Omega$

Remarque :

On dit que chaque **issue** *a* qui est dans la partie *A* **réalise** l'**évènement** *A* ($a \in A$).

Définitions :

- Un **événement impossible** est un événement qui n'est réalisé par aucune issue.
- Un **événement certain** est un événement qui est réalisé par toutes les issues.

Exemples :

On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Donc Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}

- Soit A l'événement : « sortie d'un multiple de 3 ».
  A = {3 ; 6} (les issues 3 et 6 réalisent l'événement A) et $\overline{A}$ = {1 ; 2 ; 4 ; 5}
- Soit B l'événement : « sortie du 4 ».
  B = {4} est un événement élémentaire.
- Soit C l'événement : « sortie du 7 »
  C = ∅ est l'événement impossible.
- Soit D l'événement : « sortie d'un résultat inférieur ou égal à 6 »
  D = Ω est l'événement certain.

2) Probabilité d'un événement

Une loi de probabilité est définie sur un univers Ω.

Définition :

La probabilité d'un événement A est la **somme des probabilités** des issues qui le réalisent.
On la note $p(A)$.

Exemple :

On s'intéresse au lancer d'un dé cubique. Donc Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}

La loi de probabilité sur Ω est la suivante :

Remarque : le dé est pipé.

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

A est l'événement : « Obtenir un résultat pair ». *A*={2 ; 4 ; 6}

Donc : $p(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

Propriétés :

- Aucune issue ne réalise l'événement impossible donc $p(\varnothing)=0$.
- L'événement certain est réalisé par chacune des issues donc $p(\Omega)=1$.
- Pour tout événement A, $0\leqslant p(A)\leqslant 1$.
- Pour tout événement *A*, $p(\overline{A})=1-p(A)$.

Propriété :
Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A est donné par :

$$p(A)=\frac{\text{nombre d'issues dans } A}{\text{nombre d'issues dans } E}=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Démonstration :

Nous avons vu que, dans ce cas, pour chaque issue $p=\frac{1}{n}$ où n est le nombre d'issues de l'expérience.

Si A est constitué de m issues, alors $p(A)=\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{m \text{ fois}}=\frac{m}{n}$

Exemple :

Lorsque le dé est supposé parfait, les événements élémentaires sont équiprobables.

Soit A l'événement : « Sortie d'un multiple de 3 ». Donc A = {3 ; 6}

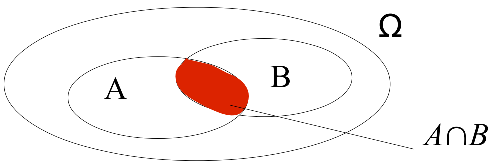
Alors $p(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

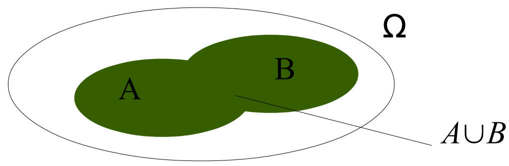
III. Calculs de probabilités

1) Intersection et réunion d'événements

Définitions :

- L'**intersection** de A et B est l'événement, noté $\boldsymbol{A\cap B}$, formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A **et** l'événement B.
- La **réunion** de A et B est l'événement, noté $\boldsymbol{A\cup B}$, formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A **ou** l'événement B (au moins l'un des deux).





Exemple :

On lance un dé cubique.

Soit A l'événement : « Sortie d'un multiple de 2 »

Soit B l'événement : « Sortie d'un nombre strictement inférieur à 3 »

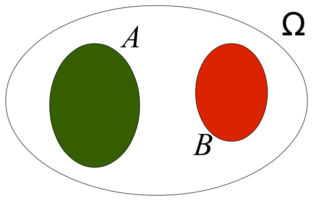
Alors A = {2 ; 4 ; 6} et B = {1 ; 2}

Donc $A\cap B$ ={2} et $A\cup B$ = {1 ; 2 ; 4 ; 6}

2) Propriété fondamentale

Définitions :

Deux événements sont **incompatibles** lorsque leur intersection est vide.



$A \cap B = \emptyset$

Exemple :

On lance un dé cubique.

Soit A l'événement : « Sortie d'un multiple de 3 »

Soit B l'événement : « Sortie d'un nombre strictement inférieur à 3 »

Alors A = {3 ; 6} et B ={1 ; 2}

Donc $A \cap B = \emptyset$. On en conclut donc que A et B sont incompatibles.

Propriété :

Si deux événements sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Exemple :

Dans l'exemple précédent : A∪B = {1 ; 2 ; 3 ; 6}

et donc (si le dé est équilibré) $p(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Propriété :

Pour tous les événements A et B : $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.

Démonstration :

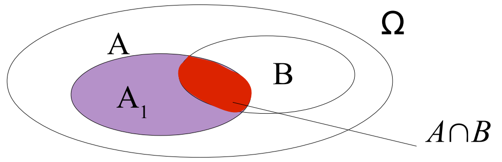
On note A_1 l'événement formé des issues de A qui n'appartiennent pas à B ($A = (A \cap B) \cup A_1$).

A_1 et B sont incompatibles et $A_1 \cup B = A \cup B$ donc :

$p(A \cup B) = p(A_1 \cup B) = p(A_1) + p(B)$

A_1 et A∩B sont aussi incompatibles donc :

$p(A) = p((A \cap B) \cup A_1) = p(A \cap B) + p(A_1)$



d'où $p(A \cap B) = p(A) - p(A_1)$

On a donc :

$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A_1) + p(B) + p(A) - p(A_1) = p(B) + p(A)$

Exemple :

Dans un jeu classique de 32 cartes, il y a 4 couleurs :

trèfle ♣ carreau ♦ cœur ♥ pique ♠

Et 8 valeurs dans chaque couleur : as, roi, dame, valet, 10, 9, 8, 7

On tire une carte au hasard dans le jeu.

Quelle est la probabilité que la carte tirée soit une dame ou un trèfle ?

Soit D l'événement : « la carte est une dame » et T l'événement : « la carte est un trèfle ».

On a donc :

- $D \cap T$: « la carte est une dame de trèfle ».
- $D \cup T$: « la carte est une dame ou un trèfle ».

Donc $p(D)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$ et $p(T)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ de plus $p(D\cap T)=\frac{1}{32}$.

Donc $p(D\cup T)=p(D)+p(T)-p(D\cap T)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{32}=\frac{4}{32}+\frac{8}{32}-\frac{1}{32}=\frac{11}{32}$.

Ainsi la probabilité de tirer un trèfle ou une dame est de $\frac{11}{32}$.