# Chapitre 0

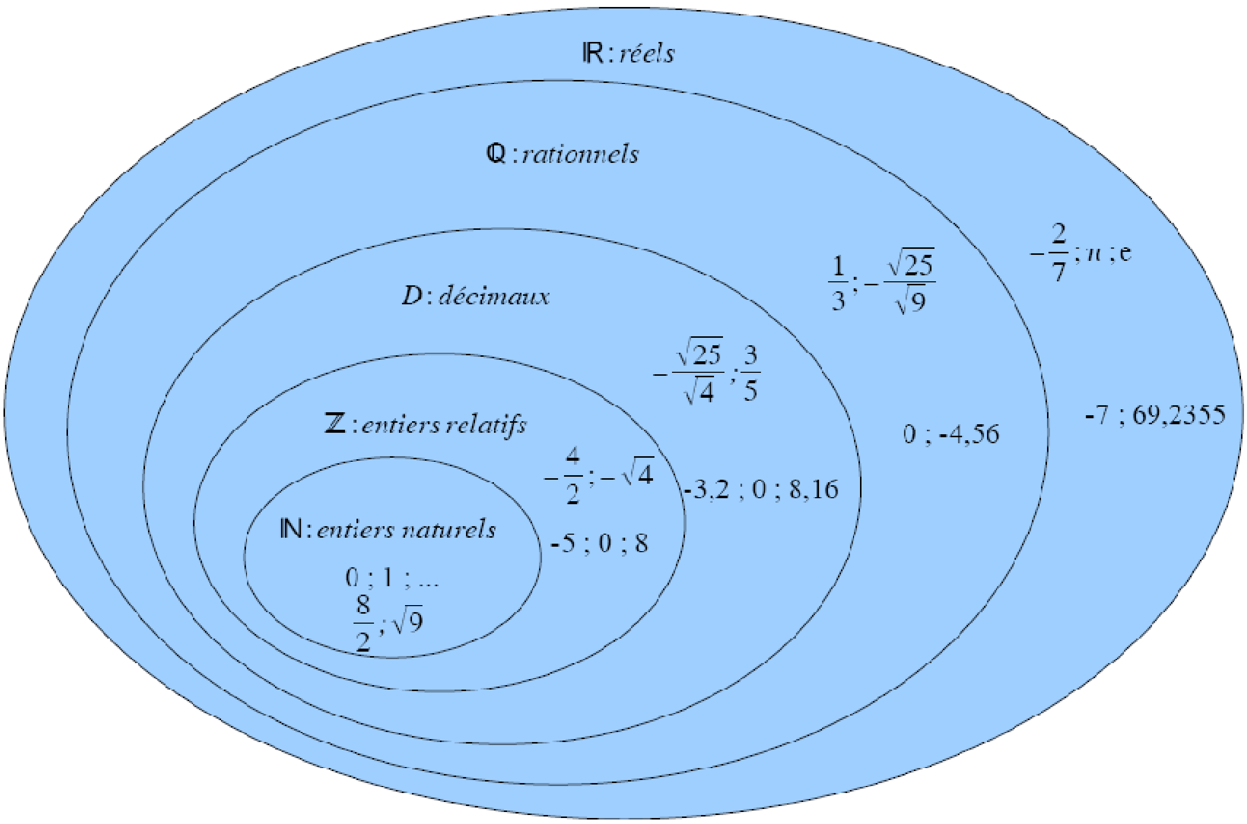
# Les nombres

## I. L'ensemble ℝ et les intervalles

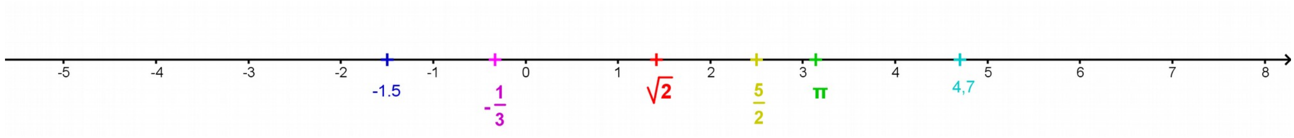
### *1)* Ensembles de nombres

**Définitions :**

- L'ensemble des nombres entiers **naturels** {0 ; 1 ; 2 ; …} est noté ℕ.
- L'ensemble des nombres entiers **relatifs** {… ;-3 ;-2 ;-1 ;0 ; 1 ; 2 ; …} est noté ℤ.
- L'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ , avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, est appelé ensemble des nombres **décimaux**. Il se note $\mathbb{D}$.
- L'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ , avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, est appelé ensemble des nombres **rationnels**. Il se note ℚ.
- L'ensemble de tous les nombres, entiers, décimaux, rationnels, irrationnels, est appelé ensemble des **nombres réels**, et il est noté ℝ.



Il est commode de représenter $\mathbb{R}$ par une droite graduée (l'ensemble des abscisses des points de la droite correspond à l'ensemble des nombres réels).




**Définitions :**

- **Encadrer** un nombre $x$, c'est trouver deux nombres $a$ et $b$ tels que $a < x < b$.

  La différence $b - a$ est l'**amplitude** de l'encadrement.
- **Arrondir** un nombre, c'est lui trouver la valeur la plus proche à une précision donnée.

**Exemples :**

- $3{,}1 < \pi < 3{,}2$ est un encadrement d'amplitude $10^{-1}$ du nombre $\pi$.
- 3,1 est l'arrondi du nombre $\pi$ à $10^{-1}$.

## 2) Les intervalles de $\mathbb{R}$

Certaines **parties** de $\mathbb{R}$ sont appelés **intervalles**.

- L'intervalle **fermé [a ; b]** est l'ensemble de tous les nombres réels $x$ tels que $a \leq x \leq b$.


- L'intervalle **ouvert ]c ; d[** est l'ensemble de tous les nombres réels $y$ tels que $c < y < d$.


- On définit de même les intervalles :

| Intervalle | | Ensemble des nombres $x$ vérifiant | Représentation |
|---|---|---|---|
| [a ; b[ | fermé à gauche, ouvert à droite | $a \leq x < b$ |  |
| ]a ; b] | ouvert à gauche, fermé à droite | $a < x \leq b$ |  |

| | | | |
|---|---|---|---|
| [a ; +∞[ | fermé à gauche, ouvert à droite | $a \leq x$ |  |
| ]a ; +∞[ | ouvert | $a < x$ |  |
| ]–∞ ; b] | ouvert à gauche, fermé à droite | $x \leq b$ |  |
| ]–∞ ; b[ | ouvert | $x < b$ |  |

**Exemples :**

- 0,5 < 0,582 < 0,6 a le même sens que 0,582 ∈ ]0,5 ; 0,6[.
- Pour dire que 0,5 n'est pas un élément de ]0,5 ; 0,6] on écrit 0,5 ∉ ]0,5 ; 0,6]

**Remarque :**

L'ensemble des nombres réels se note ℝ ou ]–∞ ; +∞[

## 3) Intersections et réunions d'intervalles

- **Intersection**

**Définition :**

L'**intersection** de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I **et** dans J : elle se note I ∩ J.

**Exemple :**

Soit A = ]-2 ; 3] et B = [1 ; 8] alors A∩B=[1 ; 3].

**Remarque :**

Il se peut que l'intersection de deux intervalles soit un ensemble ne contenant aucun nombre.

Il est appelé **ensemble vide** et se note ∅.

- **Réunion**

**Définition :**

La **réunion** de deux intervalles I et J est l'ensemble des nombres qui sont dans I **ou** dans J : elle se note I ∪ J.

**Exemple :**

Soit A = ]-2 ; 3] et B = [1 ; 8] alors A∪B=]-2 ; 8].

## 4) Valeur absolue d'un nombre réel

**Définition :**

Soit $x$ un nombre réel.

On appelle **valeur absolue de $x$**, et on note $|x|$, le nombre réel égal à $\begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

**Exemples :**

$|4| = 4$ ; $|-1{,}5| = -(-1{,}5) = 1{,}5$

**Définitions :**

Soient $a$, $x$ et $r$ des nombres réels avec $r \geq 0$.

- On appelle **distance entre les nombres $a$ et $x$** le nombre $|x - a|$.
  Cette distance est aussi égale à $|a - x|$.
- $x \in [a - r \,;\, a + r]$ si et seulement si $|x - a| \leq r$.

**Exemples :**

- La distance entre les nombres -5 et 4 est égale à $|4 - (-5)| = |9| = 9$.
- En prenant $a = 5$ et $r = 0{,}1$ : $x \in [4{,}9 \,;\, 5{,}1]$ si et seulement si $|x - 5| \leq 0{,}1$. Ce qui revient à dire que la distance entre les nombres $x$ et 5 est inférieure ou égale à 0,1.

**Propriété :**

Pour tout nombre réel $x$ et tout entier naturel $n$, il existe un nombre décimal $d$ tel que :

$$|x - d| \leq \frac{1}{10^n} .$$

$d$ est alors appelé **valeur approchée** de $x$ à $10^{-n}$ près.

**Exemple :**

$3{,}1 < \pi < 3{,}2$ donc 3,1 est une valeur approchée du nombre $\pi$ à $10^{-1}$ près.

3,2 est également une valeur approchée du nombre $\pi$ à $10^{-1}$ près.

# II. Les racines carrées

## 1) Racine carrée d'un nombre positif

**Définition :**

Pour tout nombre **positif** $a$, la **racine carrée** de $a$ est le nombre positif dont le carré est $a$.

**Exemple :**

La racine carrée de 64 est 8 parce que $8^2 = 64$ et $8 \geq 0$.

**Notation :**

La racine carrée de $a$ se note $\sqrt{a}$ .

**Conséquence :**

Pour tout nombre **positif** $a$ : $\sqrt{a^2}=a$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ .

## 2) Produit et quotient de deux racines carrées

**Définition :**

Le **produit de deux racines** carrées est égal à la **racine carrée du produit**.

$$\text{Pour } a\geqslant 0 \text{ et } b\geqslant 0 :$$
$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$

**Exemples :**

$$\sqrt{9\times 2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2} \quad ; \quad \sqrt{7}\times\sqrt{5}=\sqrt{7\times 5}=\sqrt{35}$$

**Propriété :**

Le **quotient de deux racines** carrées est égal à la **racine carrée du quotient**.

$$\text{Pour } a\geqslant 0 \text{ et } b>0 :$$
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

**Exemples :**

$$\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{80}{5}}=\sqrt{16}=4$$

**Remarques :**

- Si $a$ et $b$ sont strictement positifs, alors $\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$
- Pour tout nombre réel $a$, on a $\sqrt{a^2}=|a|$ .

# III. Calcul littéral

## 1) Développer et réduire

**Définition :**

**Développer** un produit c'est remplacer celui-ci par une somme.

**Propriétés :**

On considère les nombres relatifs : *k*, *a*, *b*, *c*, *d*

- $k(a+b)=ka+kb$
- $(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$

**Remarque :**

S'agissant de nombres relatifs, il faut respecter la règle des signes pour la multiplication.

**Définition :**

**Réduire** une expression littérale c'est écrire celle-ci avec le moins de termes possibles.

**Exemple :**

Développer (et réduire) :

$$A=(x+5)(4x-1)$$

$A=(x+5)(4x-1)$

$A=4x^2-x+20x-5$ (Développement)

$A=4x^2+19x-5$ (Réduction)

## 2) Les identités remarquables

Pour tous les nombres *a* et *b* :

Développement $\longrightarrow$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

$\longleftarrow$ Factorisation

## 3) Factoriser une expression

**Définition :**

**Factoriser** une somme (ou une différence) c'est remplacer celle-ci par un produit.

### En utilisant un facteur commun

- $A = 8x^3 - 12x^2$
  $A = 4x^2 \times 2x - 4x^2 \times 3$ (identification du facteur commun)
  $A = 4x^2(2x - 3)$ (règle de distributivité)

- $B = (2x-3)(x-4) - (2x-3)(7-3x)$ (identification du facteur commun)
  $B = (2x-3)[(x-4) - (7-3x)]$ (règle de distributivité)
  $B = (2x-3)[x-4-7+3x]$ (simplification de l'expression entre crochet)
  $B = (2x-3)(4x-11)$ (réduction)

### En utilisant une identité remarquable

- $A = 9x^2 - 42x + 49$
  $A = (3x)^2 - 2 \times (3x) \times (7) + (7)^2$ (on reconnaît $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ )
  $A = (3x-7)^2$

- $B = 36x^2 - 25$
  $B = (6x)^2 - (5)^2$ (on reconnaît $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ )
  $B = (6x-5)(6x+5)$

# IV. Équations et inéquations

## 1) Définitions

**Définition :**

Une **égalité** dans laquelle un nombre inconnu est remplacé par une lettre s'appelle une **équation**.

**Définition :**

**Résoudre** cette équation, c'est trouver **toutes** les **valeurs** numériques que l'on peut donner à cette **inconnue** pour que l'**égalité soit vraie**.

## 2) Résolution d'une équation

Pour **résoudre** une **équation**, on utilise les deux règles suivantes :

**Propriété :**

Une équation a les mêmes solutions que toutes les équations obtenues en **ajoutant** (ou en retranchant) un **même nombre** aux **deux membres** de l'équation.

**Propriété :**

Une équation a les mêmes solutions que toutes les équations obtenues en **multipliant** (ou en divisant) par un **même nombre**, non nul, les **deux membres** de l'équation.

## 3) Équation de la forme A x B = 0

Lorsqu'une équation se présente sous la forme d'un produit de facteurs égal à zéro, il ne faut surtout pas développer ce produit mais utiliser les règles suivantes.

**Propriétés :**

- Si un produit est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.
- Si l'un des facteurs d'un produit est nul alors ce produit est nul.

Les solutions de l'équation $A \times B = 0$ seront les solutions des équations A = 0 et B = 0.

**Exemple :**

Résoudre l'équation $(2-3x)(4x+8)=0$
Le produit $(2-3x)(4x+8)$ est nul lorsque :

$2-3x=0$ ou $4x+8=0$

On résout ces équations :

$$\begin{aligned} 2-3x &= 0 \\ 2-3x-2 &= 0-2 \\ -3x &= -2 \\ -\frac{1}{3}\times-3x &= -\frac{1}{3}\times-2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x+8 &= 0 \\ 4x+8-8 &= 0-8 \\ 4x &= -8 \\ \frac{1}{4}\times4x &= \frac{1}{4}\times-8 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

***Vérifications :***

pour $x=\frac{2}{3}$ :

$$\left(2-3\times\frac{2}{3}\right)\left(4\times\frac{2}{3}+8\right)=0\times\left(\frac{8}{3}-8\right)=0$$

pour $x=-2$ :

$$(2-3\times-2)(4\times-2+8)=(2+6)\times0=0$$

**<u>Conclusion :</u>** $\frac{2}{3}$ et $-2$ sont les solutions de l'équation.

## 4) <u>Résolution d'inéquations</u>

Pour **résoudre** une **inéquation**, on utilise les règles suivantes :

**<u>Propriétés :</u>**

- Si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$.
- Si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$.
- Si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ .
- Si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ .

**<u>Définition :</u>**

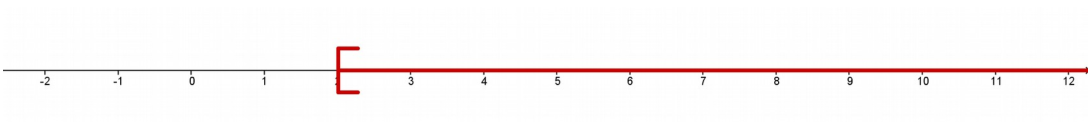
**Résoudre** une **inéquation**, c'est trouver **toutes** les valeurs possibles du nombre inconnu telles que l'**inégalité** soit **vraie** : ces valeurs sont les **solutions** de l'inéquation.

**<u>Exemple :</u>**

Résoudre l'inéquation $3x-6 \geqslant 0$ .

$3x-6 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$ .

L'ensemble des solutions est : $[2;+\infty[$



# V. Système de deux équations à deux inconnues

## 1) Équation du 1er degré à deux inconnues

**Définition :**

Une **équation** du **1er degré** à **deux inconnues** $x$ et $y$ est une équation qui peut se ramener à une équation de la forme $ax+by=c$ où $a$, $b$ et $c$ sont trois nombres donnés.

**Exemple :**

Soit l'équation $3x-5y=2$ .

$3\times4-5\times2=12-10=2$ , donc le couple (4 ; 2) est **une** solution de cette équation ((14 ; 8) également). $3x-5y=2$ a une **infinité** de solutions.

## 2) Système de deux équations à deux inconnues

**Définitions :**

Un **système** de **deux équations** du 1er degré à deux inconnues $x$ et $y$ est de la forme :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$ où $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$ sont des nombres donnés.

**Résoudre** un tel système, c'est trouver les couples ($x$ ; $y$) qui vérifient **simultanément** les deux équations.

**Exemple :**

Le couple (2 ; 3) est solution du système $\begin{cases} 4x-2y=2 \\ x+y=5 \end{cases}$ .

En effet, on vérifie que $\begin{cases} 4\times2-2\times3=8-6=2 \\ 2+3=5 \end{cases}$

## 3) Résolution d'un système

### ○ *Par substitution*

$\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$ On exprime une inconnue en fonction de l'autre (ici $x$ en fonction de $y$)

$\begin{cases} x=7-2y \\ 2\times(7-2y)+3y=11 \end{cases}$ On **substitue** une inconnue pour obtenir une équation du 1^er^ degré à une inconnue

$\begin{cases} x=7-2y \\ 14-4y+3y=11 \end{cases}$

$\begin{cases} x=7-2y \\ -y=-3 \end{cases}$ On résout la 2^ème^ équation et on obtient $y$

$\begin{cases} x=7-2\times3=1 \\ y=3 \end{cases}$ On utilise la 1^ère^ équation pour obtenir $x$

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

***Vérifications :***

$\begin{cases} 1+2\times3=1+6=7 \\ 2\times1+3\times3=2+9=11 \end{cases}$

La solution est le couple (1 ; 3).

### ○ *Par combinaison*

$\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 2x-3y=9 \end{cases}$ On cherche à avoir les mêmes coefficients devant les $x$ pour chaque équation.

$\begin{cases} 6x+8y=10 \\ 6x-9y=27 \end{cases}$ On multiplie la 1^ère^ équation par **2** et la 2^ème^ équation par **3**.

$\begin{cases} 6x+8y=10 \\ 17y=-17 \end{cases}$ On conserve la 1^ère^ équation et on soustrait la 2^ème^ équation à la 1^ère^ **(combinaison)**

$\begin{cases} 6x+8\times(-1)=10 \\ y=-1 \end{cases}$ On résout la 2^ème^ équation et on obtient $y$

$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ On utilise la 1^ère^ équation pour obtenir $x$

**Vérifications :**

$\begin{cases} 3\times3+4\times-1=9-4=5 \\ 2\times3-3\times(-1)=6-(-1)=6+1=9 \end{cases}$

La solution est le couple (3 ; -1)

# VI. Arithmétique

## 1) Ensemble $\mathbb{Z}$

**Propriété :**

La somme, la différence et le produit de deux entiers relatifs sont des entiers relatifs.

**Remarque :**

Pour la division dans $\mathbb{Z}$, on utilise la **division euclidienne :**

Pour tout entier relatifs $a$ et $b$, avec $b$ non nul, on peut écrire $a$ de façon unique sous la forme

$$a = b \times q + r$$

où $q$ est un entier relatif et $r$ un entier naturel tel que $0 \leq r < | b |$.

$q$ est appelé le **quotient** et $r$ le **reste** de la division.

## 2) Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

**Définitions :**

Soient deux entiers relatifs $n$ et $p$.

Si le reste dans la division euclidienne de $n$ par $p$ est égal à 0, c'est-à-dire s'il existe un entier relatif $q$ tel que $n = p \times q$, on dit que :

- $p$ est un **diviseur** de $n$ ou que $n$ est **divisible** par $p$.
- $n$ est un **multiple** de $p$.

**Remarque :**

Tout nombre entier relatif non nul $n$ est toujours divisible au moins par 1 et par lui-même et admet une infinité de multiples. Les multiples de $n$ sont de la forme $k \times n$ où $k \in \mathbb{Z}$.

**Propriété :**

On considère trois entiers relatifs $a$, $n$ et $m$.

Si les entiers $n$ et $m$ sont deux multiples de $a$, alors la somme $(n + m)$, la différence $(n - m)$ et le produit $n \times m$ sont aussi des multiples de $a$.

*Démonstration (pour la somme) :*

Comme $n$ est un multiple de $a$, on peut écrire : $n = k_1 \times a$, où $k_1$ est un entier relatif.

De même, on peut écrire $m = k_2 \times a$, où $k_2$ est un entier relatif, car $m$ est un multiple de $a$.

On en déduit que $n + m = k_1 \times a + k_2 \times a = (k_1 + k_2) \times a$.

Or $(k_1 + k_2)$ est la somme de deux entiers relatifs, c'est donc un entier relatif.

Ainsi, par définition, $a$ est un diviseur $(n + m)$.

Autrement dit, la somme $(n + m)$ est un multiple de $a$.

## *3)* Parité

**Définitions :**

On considère un entier relatif $n$.

- Si $n$ est divisible par 2 (ou si $n$ est un multiple de 2), on dit que $n$ est **pair**.
  Il existe alors un entier relatif $k$ tel que $n = 2 \times k$.
- Sinon, on dit que $n$ est **impair**.
  Il existe alors un entier relatif $k$ tel que $n = 2 \times k + 1$.

*Démonstration :*

On considère un entier relatif $n$.

On effectue la division euclidienne de $n$ par 2 : on obtient $n = 2 \times k + r$ avec $k$ un entier relatif et $r$ un entier naturel tel que $0 \leq r < 2$.

$r$ étant entier, on a soit $r = 0$, soit $r = 1$.

- Si $n$ est pair : par définition, 2 divise $n$ et $r = 0$. Donc $n = 2 \times k$.
- Sinon $n$ est impair et 2 ne divise pas $n$. Donc $r \neq 0$. Ainsi $r = 1$ et $n = 2 \times k + 1$.

**Exemples :**

- 38 est un nombre pair car $38 = 2 \times 19$.
- 17 est un nombre impair car $17 = 2 \times 8 + 1$.

**Propriétés :**

- La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.
- La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
- La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

**Propriétés :**

On considère un entier relatif $n$.

- Si $n$ est pair, alors le carré $n^2$ est pair.
- Si $n$ est impair, alors le carré $n^2$ est impair.

*Démonstration :*

On considère un entier relatif $n$.

- Si $n$ est pair : on peut écrire $n = 2 \times k$ avec $k$ un entier relatif.
  Alors $n^2 = (2k) \times (2k) = 2 \times (2k^2)$.
  Donc 2 divise $n^2$, d'où $n^2$ est pair.
- Si $n$ est impair : on peut écrire $n = 2 \times k + 1$ avec $k$ un entier relatif.
  Alors $n^2 = (2k + 1) \times (2k + 1) = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
  On en déduit que $n^2$ est impair.

**Remarque :**

La réciproque de ce théorème est vraie :

- Si le carré $n^2$ d'un entier $n$ est pair, alors $n$ est pair.
- Si le carré $n^2$ d'un entier $n$ est impair, alors $n$ est impair.

## 4) Nombres premiers

**Définition :**

Un nombre **entier naturel** est **premier** s'il n'admet que deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

**Remarque :**

1 n'est pas un nombre premier.

**Propriété :**

Soit $n$ un nombre entier qui n'est pas premier. Son plus petit diviseur différent de 1 (et lui-même) est un nombre premier plus petit ou égal à $\sqrt{n}$.

**Exemple :**

$12 = 4 \times 3 = 2 \times 2 \times 3$.

Le plus petit diviseur de 12 est 2 qui est premier.

Chacun des diviseurs premiers de 12 est plus petit que $\sqrt{12}$ ( $\sqrt{12} \simeq 3{,}46$ ).

**Propriété :**

Tout nombre entier peut se décomposer de manière unique sous la forme d'un produit de nombres premiers.

**Exemple :**

$84 = 2 \times 42$

$84 = 2 \times 2 \times 21$

$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

7 est un nombre premier, donc la décomposition cherchée est $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.

## *5)* Fraction irréductible

**Définition :**

Une fraction est irréductible si le numérateur et le dénominateur n'admettent qu'un seul diviseur commun : 1.

**Exemples :**

- $\frac{5}{3}$ est une fraction irréductible, car le seul diviseur commun de 5 et 3 est 1.
- $\frac{12}{15}$ n'est pas une fraction irréductible, car 3 est un diviseur commun à 12 et 15.
- $\frac{84}{30}=\frac{2^2\times3\times7}{2\times3\times5}=\frac{2\times2\times3\times7}{2\times3\times5}=\frac{2\times7}{5}=\frac{14}{5}$