Chapitre 1

Géométrie plane

I. Problème de longueur et d'angle

1) Calcul de longueur

Propriété :

Le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Propriété :

(BM) et (CN) sont deux droites sécantes en un point A.

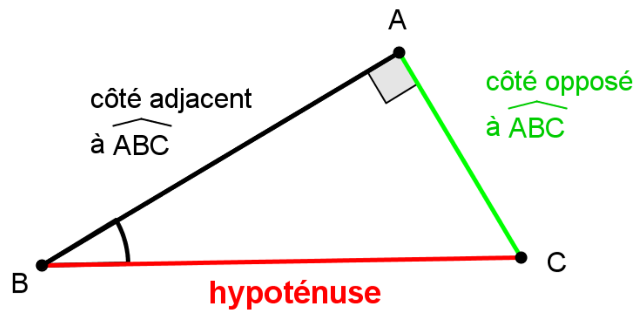
- Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.
- Si $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ et si les points A, M, B d'une part, A, N, C d'autre part sont **dans le même ordre**, alors les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**.

2) Calcul d'angle

Propriété :

Dans un triangle ABC rectangle en A :

$$\cos\widehat{ABC}=\frac{AB}{BC} \;;\; \sin\widehat{ABC}=\frac{AC}{BC} \;;\; \tan\widehat{ABC}=\frac{AC}{AB}$$



Remarque :

La trigonométrie permet de calculer des longueurs ou des angles.

Propriété :

Pour tout angle aigu α d’un triangle rectangle, on a la relation trigonométrique suivante :

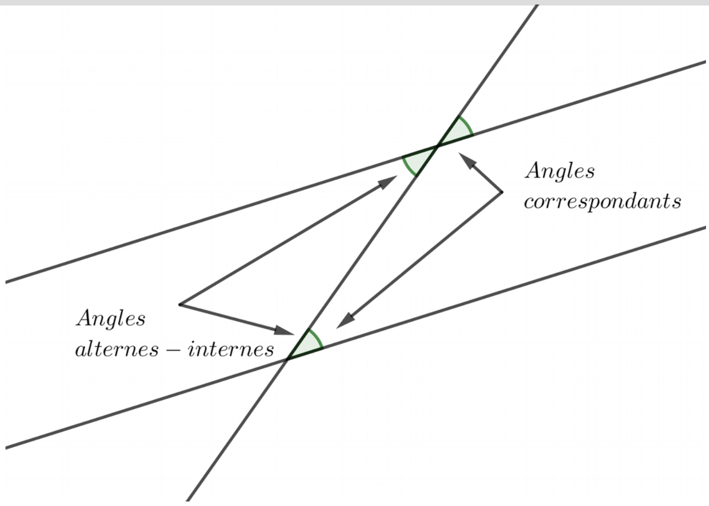
$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Propriété :

Dans un triangle, la somme des angles fait 180°.

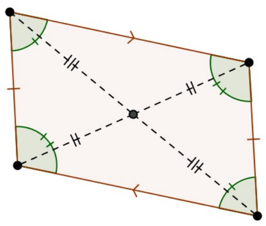
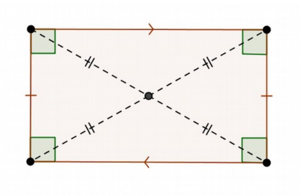
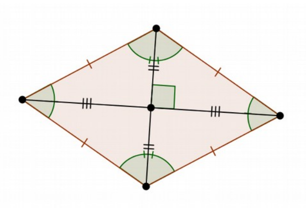
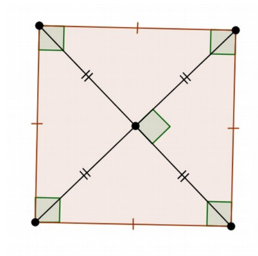
Propriété :

Deux droites parallèles et une sécante engendrent des angles alternes-internes et correspondants, de même mesure.



II. Configurations usuelles du plan

1) Quadrilatères

Quadrilatère	Définitions	Propriétés caractéristiques	Centre et axes de symétrie
 Un **parallélogramme** est un quadrilatère qui a …	ses côtés opposés parallèles deux à deux.	ses diagonales de même milieu.	**un centre** de symétrie : le point d'intersection de ses diagonales
 Un **rectangle** est un quadrilatère qui a …	quatre angles droits.	ses diagonales de même milieu **et** de même longueur.	**deux axes** de symétrie (les médiatrices de ses côtés) et **un centre** de symétrie (le point d'intersection de ses diagonales)
 Un **losange** est un quadrilatère qui a …	quatre côtés de même longueur.	ses diagonales de même milieu **et** perpendiculaires	**deux axes** de symétrie (ses diagonales) et **un centre** de symétrie (le point d'intersection de ses diagonales)
 Un **carré** est un quadrilatère qui a …	quatre angles droits **et** quatre côtés de même longueur.	ses diagonales de même milieu **et** de même longueur **et** perpendiculaires	**quatre axes** de symétrie et **un centre** de symétrie

2) Cercles et angles

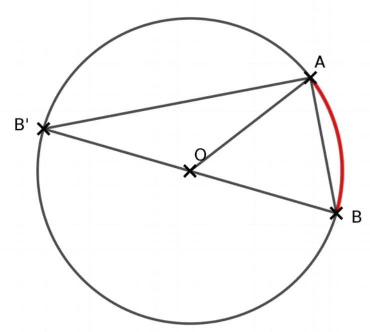
Définition :

O est un point et r un nombre réel strictement positif.

L'ensemble des points M du plan vérifiant OM = r est le **cercle** de **centre** O et de **rayon** r.

Vocabulaire :

- [OA] est un rayon
- [BB'] est un diamètre
- $\widehat{BB'A}$ est un angle inscrit
- $\widehat{BOA}$ est un angle au centre
- [AB] est une corde
- $\overset{\frown}{AB}$ est un arc



Propriété :

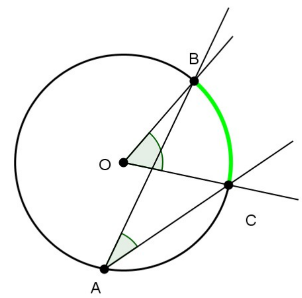
Lorsqu'un **angle inscrit** α intercepte le même arc qu'un **angle au centre** β alors :

$$\beta = 2\,\alpha$$

Exemple :

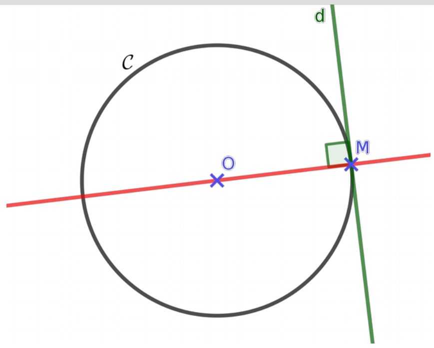
Puisque l'angle au centre $\widehat{BOC}$ intercepte le même arc $\overset{\frown}{BC}$ que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ alors :

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$$



Définition :

La **tangente** en un point M d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O est la droite (*d*) perpendiculaire en M à la droite (OM).



Propriété :

Un cercle $\mathscr{C}$ et la tangente (*T*) en un point M de ce cercle ont un unique point commun : le point M, appelé point de contact du cercle $\mathscr{C}$ et de la tangente (*T*).

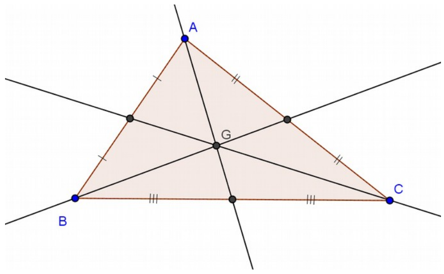
3) Triangles

Droites et points remarquables

- **Médianes et centre de gravité**

Les **médianes** d’un triangle sont **concourantes**.

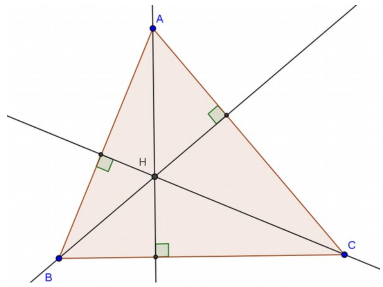
Leur point d’intersection G est appelé **centre de gravité** du triangle.



- **Hauteurs et orthocentre**

Les **hauteurs** d’un triangle sont **concourantes**.

Leur point d’intersection H est appelé **orthocentre** du triangle.

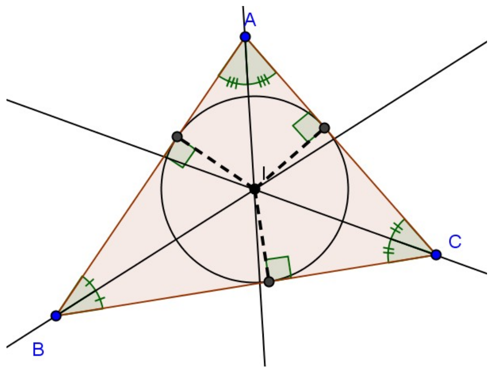


- **Bissectrices et cercle inscrit**

Les **bissectrices** d’un triangle sont **concourantes**.

Leur point d’intersection I est équidistant de chacun des trois côtés du triangle.

I est le centre du **cercle inscrit** dans le triangle.



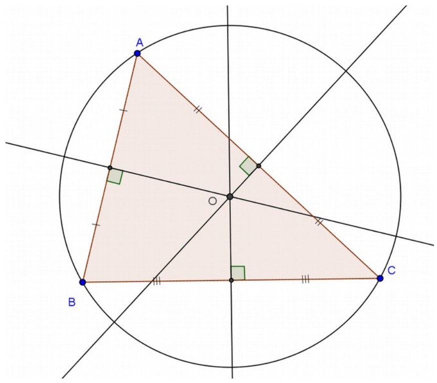
- **Médiatrices et cercle circonscrit**

Les **médiatrices** d’un triangle sont **concourantes**.

Leur point d’intersection O est équidistant de chacun des sommets du triangle :

OA = OB = OC

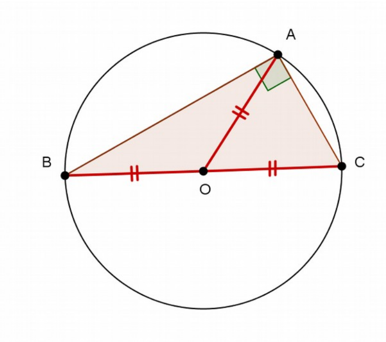
O est le centre du **cercle circonscrit** dans le triangle.



Triangles particuliers

- **Triangle rectangle**

Dans un triangle ABC rectangle en A, le centre O du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse [BC].



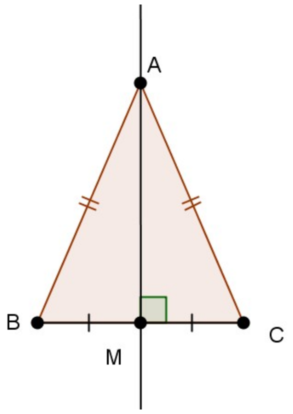
Réciproquement :

- Si dans le triangle ABC le milieu O de [BC] est tel que $OA=\frac{1}{2}BC$, alors le triangle ABC est rectangle en A.
- Si A est un point du cercle de diamètre [BC], alors le triangle ABC est rectangle en A.

- **Triangle isocèle**

Dans un triangle isocèle en A, la médiane (AM) est aussi la hauteur et bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.

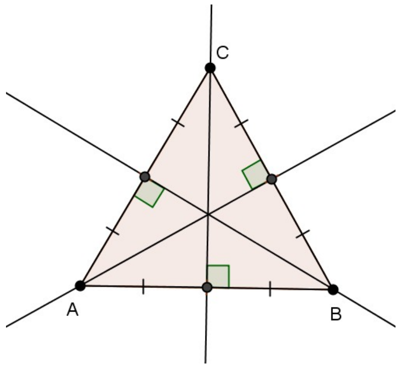
Elle est donc médiatrice de [BC] et axe de symétrie du triangle.



- **Triangle équilatéral**

Dans un triangle équilatéral, le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle inscrit sont confondus.

Chaque hauteur est un axe de symétrie.



4) Projeté orthogonal d’un point sur une droite

Soit D une droite du plan et A un point.

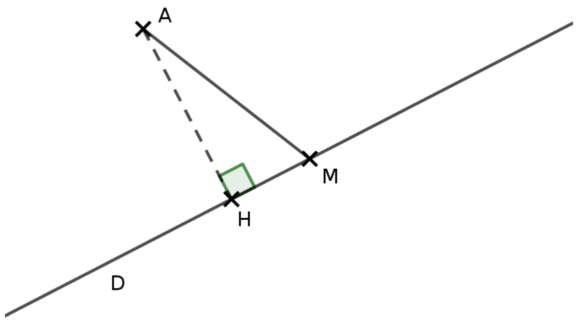
Définition :

On appelle **projeté orthogonal** de A sur D le point d’intersection de la droite D avec la perpendiculaire à D passant par A.

Propriété :

La **distance** du **point** A **à la droite** D est la plus petite distance séparant un point D avec A.

Elle est égale à AH où H est le projeté orthogonal du point A sur D.

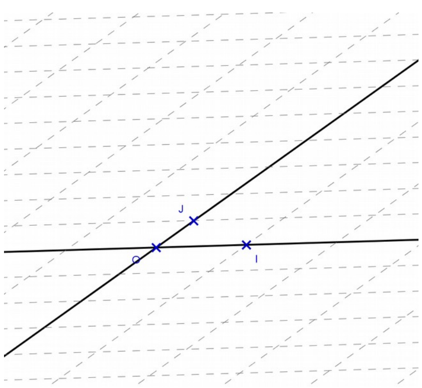


III. Géométrie repérée

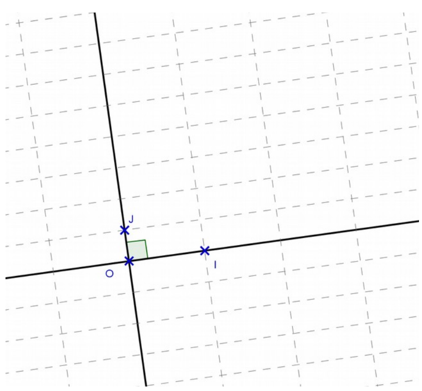
1) Repérage

Définition :

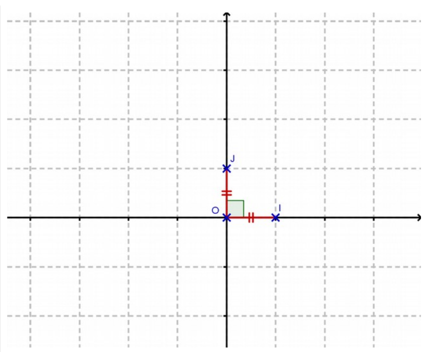
Étant donné trois points distincts O, I, J non alignés, le **repère** (O ; I, J) est le repère d’**origine** O ayant pour **axe des abscisses** (OI), pour **axe des ordonnées** (OJ) et tel que I et J sont les points de coordonnées respectives (1; 0) et (0 ; 1).



Repère quelconque



Repère orthogonal



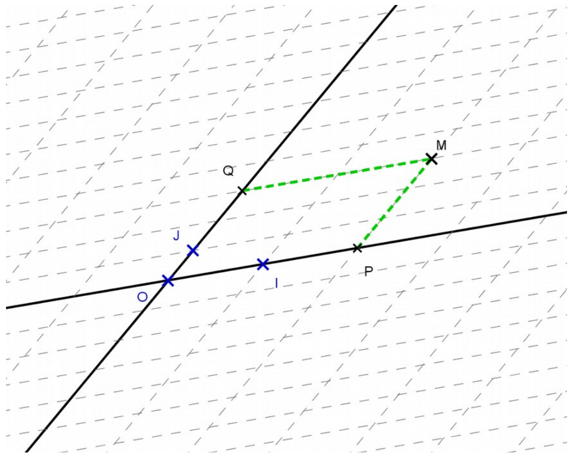
Repère orthonormé

2) Coordonnées d'un point dans un repère

Soit M un point du plan (muni du repère (O ; I, J)).

La parallèle à (OI) passant par M coupe (OJ) en Q.
La parallèle à (OJ) passant par M coupe (OI) en P.

Le point M est entièrement déterminé par P et Q.



Définitions :

- L'**abscisse** x_M du point M est l'abscisse du point P sur (OI).
- L'**ordonnée** y_M du point M est l'abscisse du point Q sur (OJ).
- Le couple (x_M ; y_M) s'appelle les **coordonnées** du point M dans le repère (O ; I, J).

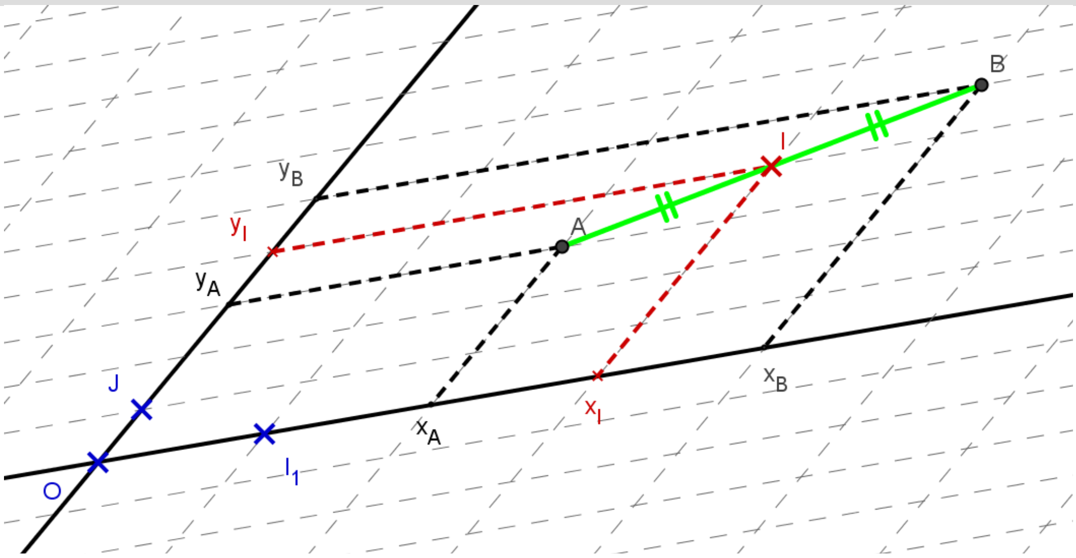
Exemple :
Sur le repère ci-dessus, les coordonnées du point O sont (0 ; 0).
Q(0 ; 3) ; P(2 ; 0) ; M(2 ; 3)

3) Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété :

Dans tout repère, les coordonnées du milieu I d'un segment [AB] où A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$



4) Calculs de distances

Propriété :

Dans un repère **orthonormé**, la distance AB entre deux points A (x_A ; y_A) et B (x_B ; y_B) est donnée par :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

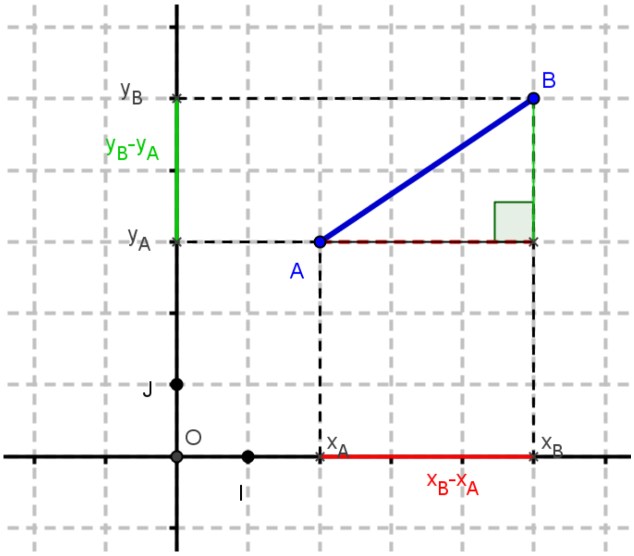
Exemple :

Dans le repère orthonormé ci-contre,

$A(2;3)$ et $B(5;5)$

donc :

$$AB=\sqrt{(5-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{3^2+2^2}$$
$$=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}\simeq 3{,}61$$



Remarques :

- Il faut que le repère soit orthonormé, car cette propriété repose sur le théorème de Pythagore.
- $(x_B-x_A)^2=(x_A-x_B)^2$