# Chapitre 2

# Généralités sur les fonctions

## I. Notions de fonction

### 1) Fonction et ensemble de définition

**Définition :**

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

On appelle **fonction à valeurs réelles** $f$ définie sur D un procédé qui à tout réel $x$ de D associe un unique réel, noté $f(x)$.

D est appelé l'**ensemble de définition** de la fonction $f$.

Pour un nombre $a$ de D, si $f(a) = b$, on dit que :

- $b$ est **l'image** de $a$ par la fonction $f$.
- $a$ est **un antécédent** de $b$ par la fonction $f$.

**Remarques :**

- L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des nombres pour lesquels il existe une image par la fonction.
- Un nombre peut avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents.
- Une fonction traduit une relation de dépendance entre une variable et une autre grandeur (son image), qui peut s'exprimer en fonction de cette variable.
- Cette correspondance se note :

$$f : \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

### 2) Définition d'une fonction

**Définition :**

Soit $f$ une fonction, D son ensemble de définition et $x$ un élément de D.

L'**expression algébrique** d'une fonction donne directement $f(x)$ en fonction de la variable $x$.

**Exemple :**

La fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x - 6)^2$.

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$, on peut calculer les images de n'importe quel nombre réel par la fonction $g$. Par exemple, on a $g(2) = (2 - 6)^2 = (-4)^2 = 16$.

**Remarques :**

- On peut aussi écrire $g : x \mapsto (x - 6)^2$.
- Il n'existe pas toujours d'expression à une fonction.

**Définition :**

Soit $f$ une fonction, D son ensemble de définition et $x \in$ D.

Un **tableau de valeurs** d'une fonction $f$ donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable $x$ et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

**Exemple :**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre $x$ | -4 | -1 | 0 | 2 | 3 |
| Image $h(x)$ | 5 | 4 | 1 | 2 | 4 |

Le nombre 0 a une seule image 1

$h(-1) = 4$ et $h(3) = 4$ donc les antécédents de 4 par $h$ sont -1 et 3.

L'ensemble de définition de $h$ est $D = \{-4 ; -1 ; 0 ; 2 ; 3\}$.

# II. Courbe représentative

## 1) Représentation graphique d'une fonction

**Définition :**

Dans un repère du plan, on appelle **courbe représentative** (ou représentation graphique) de la fonction $f$, notée $\mathscr{C}_f$, l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ qui vérifient :

$$x \in \text{D} \quad \text{et} \quad y = f(x)$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est formée de tous les points dont l'**ordonnée** est l'**image** de l'abscisse par $f$.

La relation $y = f(x)$ est appelée **équation de la courbe** $\mathscr{C}_f$.

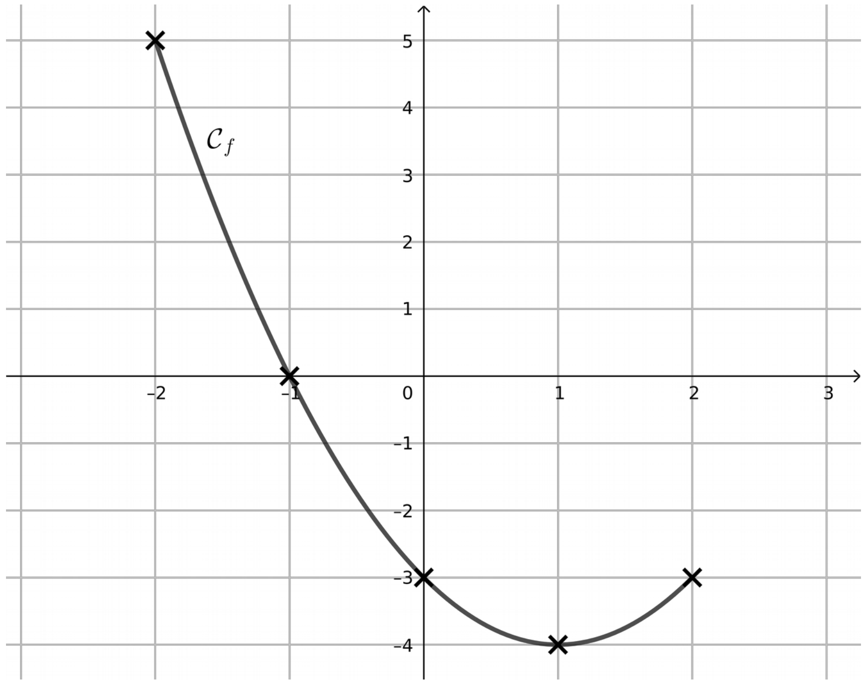
**Exemple :**

On considère la fonction $f$ définie sur [-2; 2] par $f(x) = (x - 1)^2 - 4$.

La courbe représentative de la fonction est la courbe d'équation $y = (x - 1)^2 - 4$.

$f(1) = (1 - 1)^2 - 4 = -4$, donc l'image de 1 est 4 ; la courbe passe par le point A(1 ; -4).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | 5 | 0 | -3 | -4 | -3 |




**Remarque :**

Une fonction peut être définie par une courbe. On peut alors effectuer des lectures d'images et d'antécédents mais seulement avec la précision permise par le graphique et cela ne permet pas, à priori, d'en déduire une expression algébrique de la fonction.

## *2)* Parité d'une fonction

### Intervalle

**Définition :**

Un ensemble de $\mathbb{R}$ (par exemple un intervalle) est dit **centré en 0** (ou symétrique par rapport à 0) si, pour tout nombre de l'ensemble, son opposé appartient à l'ensemble.

### Fonction paire

**Définition :**

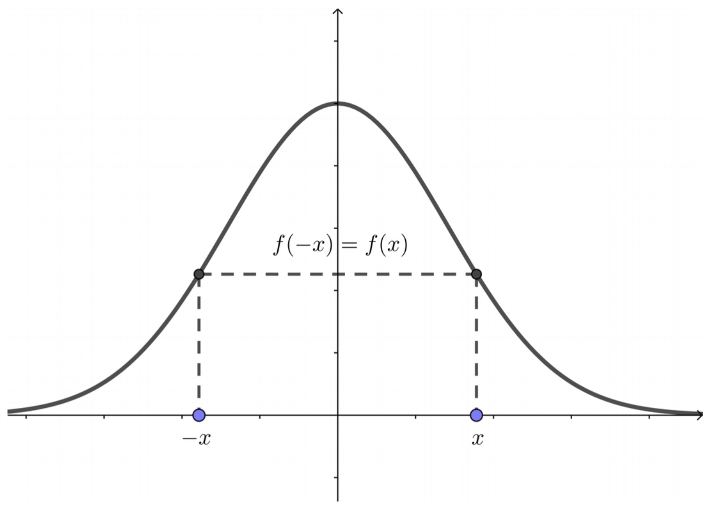
Une fonction $f$, définie sur un ensemble de définition D centré en 0, est **paire** si pour tout réel $x$ de D, on a $f(-x) = f(x)$.

**Exemple :**

La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^2$ est paire. En effet, l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0. De plus, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

**Propriété :**

La courbe représentative d'une fonction **paire** est **symétrique** par rapport à l'**axe des ordonnées**.




## Fonction impaire

**Définition :**

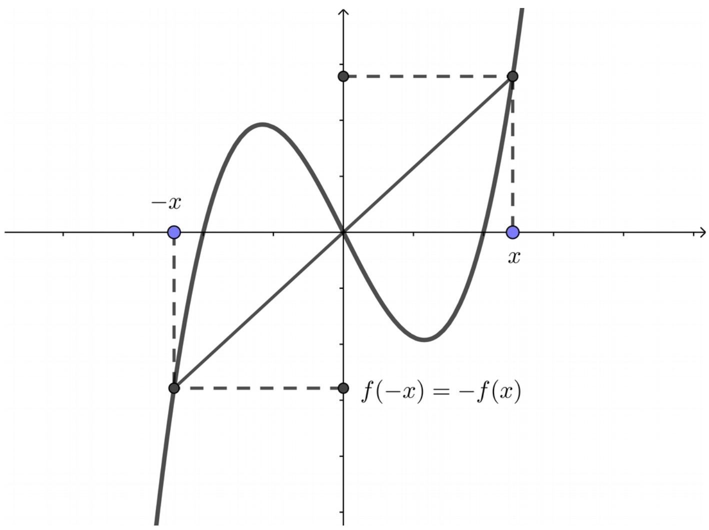
Une fonction *f*, définie sur un ensemble de définition D centré en 0, est **impaire** si pour tout réel $x$ de D, on a $f(-x) = -f(x)$.

**Exemple :**

La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^3$ est impaire. En effet, l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0. De plus, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

**Propriété :**

La courbe représentative d'une fonction **impaire** est **symétrique** par rapport à l'**origine du repère**.



# III. Résolution graphique d'équations

## 1) Équation de la forme *f* (*x*) = *k*

**Définition :**

Soient $k$ un nombre réel et $f$ une fonction de domaine de définition $D$.

On appelle **solution** de l'équation $f(x) = k$ tout réel $a$ de $D$ vérifiant $f(a) = k$.

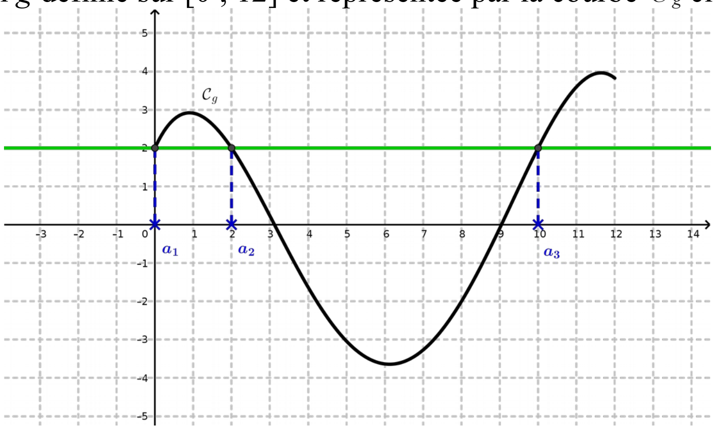
**Résoudre** l'équation $f(x) = k$ consiste à déterminer l'ensemble $S$ de ses solutions.

**Propriété :**

**Résoudre graphiquement** l'équation $f(x) = k$ revient à déterminer les abscisses des éventuels points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant une ordonnée égale à $k$.

**Exemples :**

- Soit la fonction $g$ définie sur [0 ; 12] et représentée par la courbe $\mathscr{C}_g$ ci-dessous :

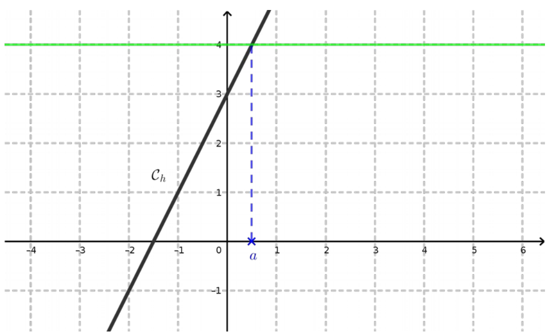



L'équation $g(x) = 2$ a trois solutions : S = {0 ; 2 ; 10}

**Remarques :**

  - L'équation $g(x) = -2$ a deux solutions
  - L'équation $g(x) = 4$ a une solution
  - L'équation $g(x) = 5$ n'a pas de solution

- Soit la fonction affine $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x + 3$




L'équation $h(x) = 4$ admet une seule solution $a = 0{,}5$.

**Remarque :**

On peut également dans ce cas résoudre l'équation $h(x) = 4$ soit $2x + 3 = 4$.

Donc $S = \{0,5\}$.

## 2) Généralisation : équation de la forme *f* (*x*) = *g* (*x*)

**Définition :**

Soit $f$ et $g$ définies sur le même domaine D.

On appelle **solution** de l'équation $f(x) = g(x)$ tout réel $a$ de D vérifiant $f(a)=g(a)$.

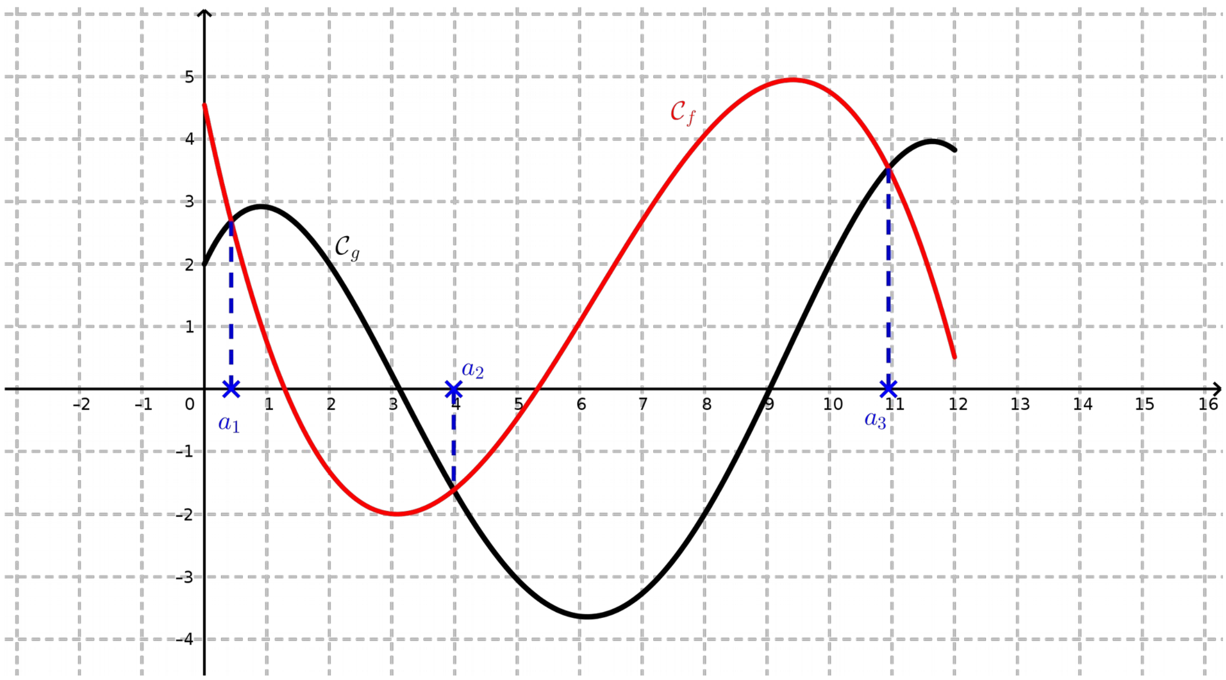
**Résoudre** l'équation $f(x) = g(x)$ consiste à déterminer l'ensemble $S$ de ses solutions.

**Propriété :**

**Résoudre graphiquement** l'équation $f(x) = g(x)$ revient à déterminer les abscisses des éventuels points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

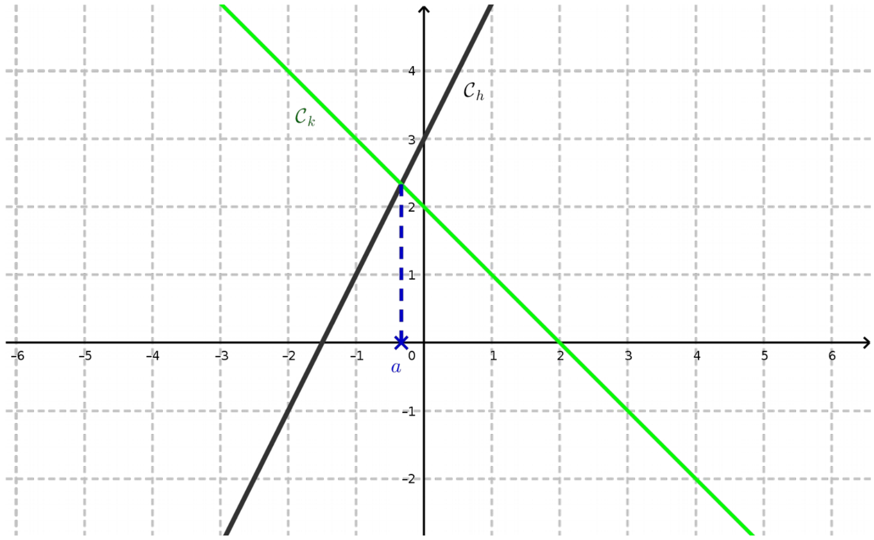
**Exemples :**

- Soient les fonctions $g$ et $f$ définies sur $[0 ; 12]$ et représentées par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ci-dessous :




L'équation $f(x) = g(x)$ a trois solutions $S = \{0,4 ; 4 ; 11\}$

- Soient les fonctions affines $h$ et $k$ définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x + 3$ et $k(x) = -x + 2$




L'équation $h(x) = k(x)$ admet une seule solution $a$ = -0,3.

**Remarque :**

On peut également dans ce cas résoudre l'équation $h(x) = k(x)$ soit $2x + 3 = -x + 2$.

Donc $S = \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ .

## 3) Approximation

Une fonction $f$ est définie sur un intervalle I et représentée graphiquement par une courbe $\mathscr{C}_f$ dans le plan muni d'un repère.

$k$ est un nombre et on suppose que l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution α.

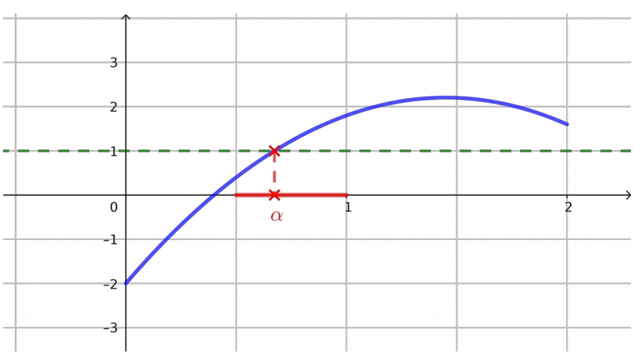
**Définition :**

**Encadrer la racine α de l'équation** $f(x) = k$ revient à déterminer un intervalle $[a\,;\,b]$, où $a$ et $b$ sont deux nombres de I, tel que $\alpha \in [a\,;\,b]$, c'est-à-dire $a \leq \alpha \leq b$.

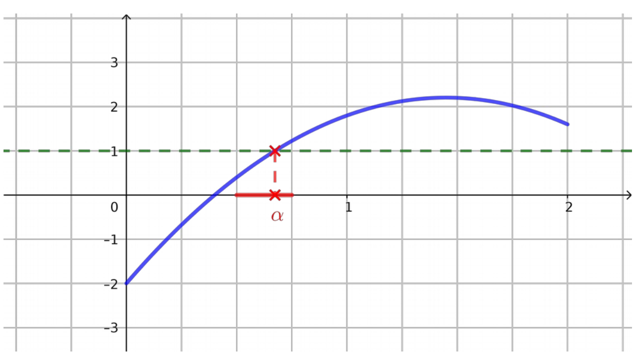
La précision de l'encadrement est donnée par **l'amplitude de l'intervalle** $[a\,;\,b]$, égale à $(b - a)$.

**Exemple :**

La fonction $f$ est définie sur [0 ; 2] et l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur [0 ; 2].




La précision du repère permet de donner un encadrement d'amplitude 0,5 : α ∈ [0,5 ; 1]




La précision du repère permet de donner un encadrement d'amplitude 0,25 : α ∈ [0,5 ; 0,75]