Chapitre 9
Fonctions de référence

I. Fonction carré

1) Définition

Définition :

La **fonction carré** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Exemples :

- L'image de -1 et de 1 par f est 1.
- L'image de $\sqrt{3}$ et de $-\sqrt{3}$ par f est 3.
- 16 a deux antécédents par f qui sont 4 et -4.
- -7 n'admet aucun antécédent par f.

Remarque :

$f(1) = 1$ et $f(2) = 4$. $f(2)$ n'est pas le double de $f(1)$; cette fonction n'est donc pas linéaire.

2) Représentation graphique

Définition :

La courbe représentative de la fonction carré dans un repère est une **parabole** $\mathscr{P}$ de **sommet** l'origine du repère.

Propriétés :

- Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$.

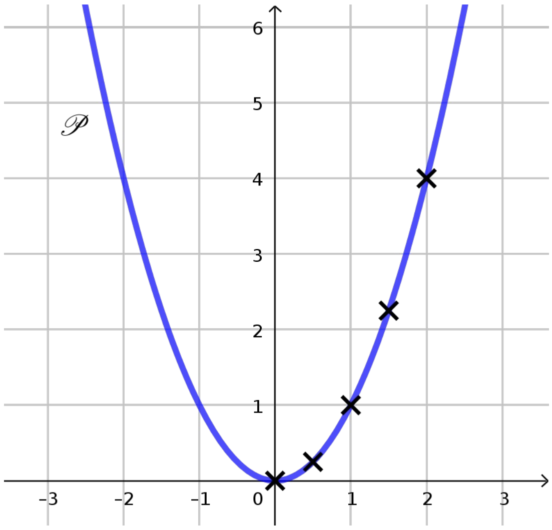
  La courbe $\mathscr{P}$ est donc située **au-dessus** de l'axe des **abscisses**.
- Pour tout réel x, on a $(-x)^2 = x^2$. Ainsi la fonction carré est **paire**.

  La courbe $\mathscr{P}$ admet l'**axe des ordonnées** pour axe de **symétrie**.
- Si $0 \leq a < b$ alors $a^2 < b^2$ et si $a < b \leq 0$ alors $a^2 > b^2$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a le tableau de valeurs :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	4
x^2	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	16



3) Équations et inéquations

Propriétés :

- Si $c \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'**équation $x^2 = c$** est :
  - $\{ -\sqrt{c} \;;\; \sqrt{c} \}$ si $c > 0$.
  - $\{0\}$ si $c = 0$.
  - $\varnothing$ si $c < 0$
- Si c est un nombre réel strictement positif, alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'**inéquation $x^2 < c$** est l'intervalle $] -\sqrt{c} \;;\; \sqrt{c} [$.

Exemples :

- L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = 3$ est $\{ -\sqrt{3} \;;\; \sqrt{3} \}$.
- L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 < 3$ est $] -\sqrt{3} \;;\; \sqrt{3} [$.

II. Fonction racine carré

1) Définition

Définition :

La **fonction racine carré** est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Exemples :

- L'image de 1 par f est 1.
- L'image de 3 par f est $\sqrt{3}$.
- -1 n'admet pas d'image par f.
- -7 n'admet aucun antécédent par f.

Remarque :

$f(1) = 1$ et $f(4) = 2$. $f(4)$ n'est pas le quadruple de $f(1)$; cette fonction n'est donc pas linéaire.

2) Représentation graphique

Définition :

La courbe représentative de la fonction racine carré dans un repère est une **demi-parabole** de **sommet** l'origine du repère.

Propriétés :

- Pour tout réel x, $\sqrt{x} \geq 0$.

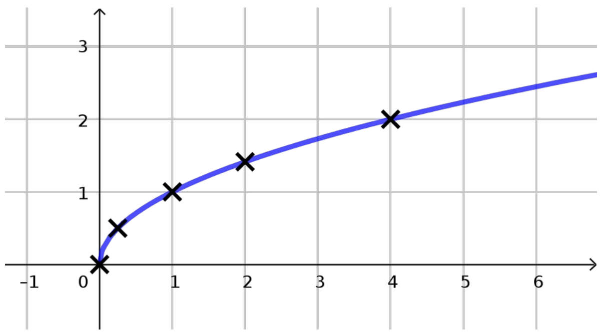
  La courbe est donc située **au-dessus** de l'axe des **abscisses**.
- La fonction racine carrée est définie sur $[0 ; +\infty[$ qui n'est pas centré en 0.

  La fonction n'est ni paire, ni impaire.
- Si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a le tableau de valeurs :

x	0	0,25	1	2	4	9
$\sqrt{x}$	0	0,5	1	~ 1,41	2	3



3) Équations et inéquations

Propriétés :

Soit c un nombre réel dans $[0 ; +\infty[$:

- l'ensemble des solutions dans $[0 ; +\infty[$ de l'**équation** $\sqrt{x} = c$ est $\{c^2\}$.
- l'ensemble des solutions dans $[0 ; +\infty[$ de l'**inéquation** $\sqrt{x} < c$ est $[0 ; c^2[$.

III. Fonction inverse

1) Définition

Définition :

La **fonction inverse** est la fonction définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exemples :

- L'image de 1 par f est 1.
- L'image de 3 par f est $\dfrac{1}{3}$.
- 0 n'admet aucun antécédent par f.

Remarques :

- 0 n'a pas d'image par la fonction inverse. 0 est une valeur interdite.
- Pour tout réel x non nul, l'inverse de $\dfrac{1}{x}$ est x.

2) Représentation graphique

Définition :

La courbe représentative de la fonction inverse dans un repère est une **hyperbole $\mathscr{H}$** de **sommet** l'origine du repère.

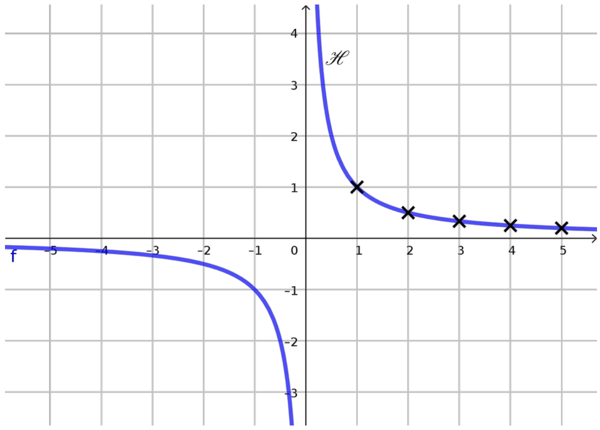
Propriétés :

- $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ est centré en 0. De plus, $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$. Donc la fonction est impaire.
- La courbe $\mathscr{H}$ est **symétrique** par rapport à l'**origine** du repère.
- Pour tous réels a et b, non nuls, et de même signe, si $a < b$ alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

On a le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5
$\frac{1}{x}$	$\times$	1	0,5	~ 0,33	0,25	0,2



3) Équations et inéquations

Propriétés :

- Si $c \in \mathbb{R}^*$, alors l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions dans]-∞ ; 0[∪]0 ; +∞[de l'**équation** $\frac{1}{x}$ **= c** est $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{c}\right\}$.
- Si $c \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble des solutions dans]-∞ ; 0[∪]0 ; +∞[de l'**inéquation** $\frac{1}{x}$ **< c** est :
  - $]-\infty\,;0[\cup\left]\frac{1}{c};+\infty\right[$ si $c > 0$.
  -]-∞ ; 0[si $c = 0$.
  - $\left]\frac{1}{c};0\right[$ si $c < 0$

Exemple :

L'ensemble des solutions dans]-∞ ; 0[∪]0 ; +∞[de l'inéquation $\frac{1}{x}$ < 7 est $]-\infty\,;0[\cup\left]\frac{1}{7};+\infty\right[$.

IV. Fonction cube

1) Définition

Définition :

La **fonction cube** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Exemples :

- L'image de 1 par f est 1.
- L'image de -1 par f est -1.
- L'image de 3 par f est 27.

Remarque :

$f(1) = 1$ et $f(2) = 8$. $f(2)$ n'est pas le double de $f(1)$; cette fonction n'est donc pas linéaire.

2) Représentation graphique

Propriétés :

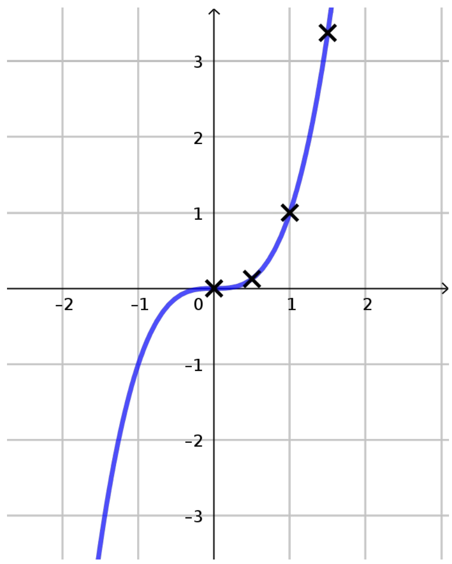
- Pour tout réel x, on a $(-x)^3 = -x^3$. Ainsi la fonction cube est impaire.

  La courbe représentative de la fonction cube est **symétrique** par rapport à l'**origine** du repère.
- Pour tous réels a et b, si $a < b$ alors $a^3 < b^3$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a le tableau de valeurs :

x	0	0,5	1	1,5	2	3
x^3	0	0,125	1	3,375	8	27



Propriétés :

Pour tout nombre réel a.

- Si $0 < a < 1$, alors $0 < a^3 < a^2 < a < 1$.
- Si $a > 1$, alors $a^3 > a^2 > a > 1$.