Chapitre 6

Fonctions affines

I. Caractérisation

1) Définition

Définition :

Une **fonction affine** est une fonction f définie pour tout nombre réel x par la relation :

$$f(x) = mx + p$$

où m et p sont deux nombres réels fixés.

La fonction f est **définie** sur $\mathbb{R}$.

Exemples :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$ est une fonction affine, avec $m = 3$ et $p = -5$.
- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x$ est une fonction linéaire (donc affine), avec $m = -2$ et $p = 0$.

Définitions :

- Si $p = 0$, alors la relation devient $f(x) = mx$.
  La fonction f est une **fonction linéaire**.
- Si $m = 0$, alors la relation devient $f(x) = p$.
  La fonction f est une **fonction constante**.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tout réel distincts a et b, le rapport $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant.

Remarque :

Le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le **taux d'accroissement** entre a et b.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ et a et b deux réels distincts, alors :

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{et } p = f(a) - ma$$

Exemple :

f est une fonction affine telle que $f(0) = -5$ et $f(1) = -2$.

Alors, $m = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{-2-(-5)}{1} = -2+5 = 3$ et $p = f(0) = -5$.

f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$.

2) Représentation graphique

Propriété :

La **représentation graphique** d'une fonction affine, $f(x) = mx + p$ est une **droite**.

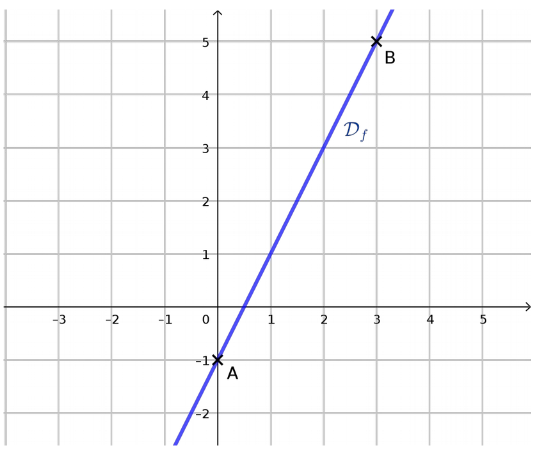
Remarques :

- Cette droite a pour **équation** $y = mx + p$.
- Pour représenter f, il suffit de placer deux points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) avec $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$ puis de tracer la droite passant par ces deux points.
- Lorsque la fonction est linéaire, elle est représentée par une droite passant par l'origine du repère.
- Lorsque la fonction est constante, elle est représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple :

Représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto 2x - 1$ dans un repère.

On prend $x_A = 0$ et $x_B = 3$, on a donc $y_A = -1$ et $y_B = 5$.



Définitions :

Si $f(x) = mx + p$, alors :

- Le nombre m est le **coefficient directeur** de la droite.
- Le nombre p est l'**ordonnée à l'origine**.

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$ est une fonction affine représenté par une droite de coefficient directeur $m = 2$ et d'ordonnée à l'origine $p = -1$.

Propriétés :

Soient f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ et d la droite qui la représente dans un repère.

Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points quelconques de d.

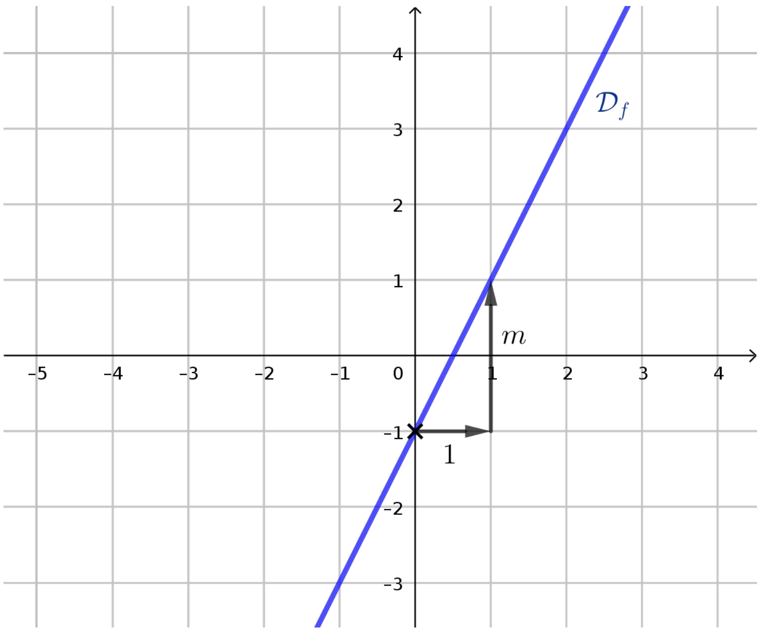
- $m = \dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

  Lorsque $x_B - x_A = 1$, alors $y_B - y_A = m$.
- p est l'image de 0 par la fonction f, c'est donc l'ordonnée du point d'intersection de la droite représentative de f avec l'axe des ordonnées.

Exemple :

Représentation graphique de la fonction affine $x \mapsto 2x - 1$ dans un repère.

On a donc $p = -1$ et $m = 2$.



II. Étude de fonction

1) Variations

Propriétés :

Soient f une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.

Le sens de variation de f ne dépend que du **signe de m**.

- Si $m > 0$, alors f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, alors f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Soient deux réels distincts x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$.

On doit comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$, c'est-à-dire étudier le signe de $f(x_2) - f(x_1)$.

Or $f(x_2) - f(x_1) = (mx_2 + p) - (mx_1 + p) = mx_2 - mx_1 = m(x_2 - x_1)$.

On sait de plus que $x_1 < x_2$ donc $x_2 - x_1 > 0$.

On en déduit que $f(x_2) - f(x_1)$ est du signe de m.

Exemples :

- Comme $m = 2 > 0$, la fonction $f : x \mapsto 2x - 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Comme $m = -3 < 0$, la fonction $g : x \mapsto -3x + 5$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Propriétés :

- f est une fonction **impaire** si et seulement si, f est une fonction **linéaire**.
- f est une fonction **paire** si et seulement si, f est une fonction **constante**.

2) Signe

Définition :

Étudier le signe d'une fonction $f(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est strictement positif, nul ou strictement négatif.

Le signe est souvent présenté sous la forme d'un **tableau de signe**.

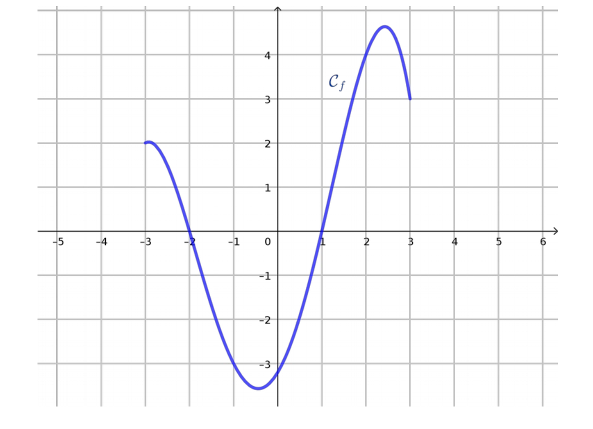
Exemple :

f est la fonction définie sur [-3 ; 3] dont voici la courbe représentative dans un repère.

- $f(x) > 0$ si $x \in [-3\ ;\ 2[\cup]1\ ;\ 3]$
- $f(x) < 0$ si $x \in]-2\ ;\ 1[$
- $f(x) = 0$ si $x = -2$ ou $x = 1$.

On a donc

x	-3		-2		1		3
$f(x)$		+	0	-	0	+	



Propriété :

Soient m et p deux nombre réels avec $m \neq 0$.

La **fonction affine** f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ s'annule et change de signe une fois dans son ensemble de définition en $x = -\dfrac{p}{m}$.

Si $m > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)=mx+p$		$-$	0	$+$	

Si $m < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)=mx+p$		$+$	0	$-$	

Exemple :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto -3x + 4$.

$g(x) = mx + p$ avec $m = -3$, m est négatif, donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $g(x) = 0$ pour $-3x + 4 = 0$ soit $x = \dfrac{4}{3}$.

Donc

x	$-\infty$		$\dfrac{4}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Propriété :

Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions affines, on étudiera le signe de chacune des fonctions dans un même tableau de signes et on conclura à l'aide de la propriété des signes d'un produit ou d'un quotient.