Chapitre 4

Étude de fonction

I. Variations et extremums

1) Sens de variation

Définitions :

f est une fonction et I un intervalle contenu dans son ensemble de définition.

- f est **strictement croissante** sur l'intervalle I si, pour tous nombres u et v de l'intervalle I :

$$\text{si } u < v \text{ alors } f(u) < f(v).$$

- f est **strictement décroissante** sur l'intervalle I si, pour tous nombres u et v de l'intervalle I :

$$si\ u < v \text{ alors } f(u) > f(v).$$

Remarques :

- f est **croissante** sur l'intervalle I si pour tous nombres u et v de l'intervalle I :

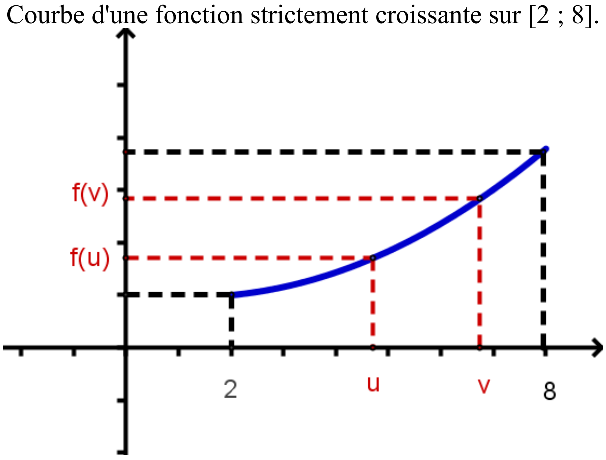
$$\text{si } u < v \text{ alors } f(u) \leq f(v).$$

- f est **décroissante** sur l'intervalle I si pour tous nombres u et v de l'intervalle I :

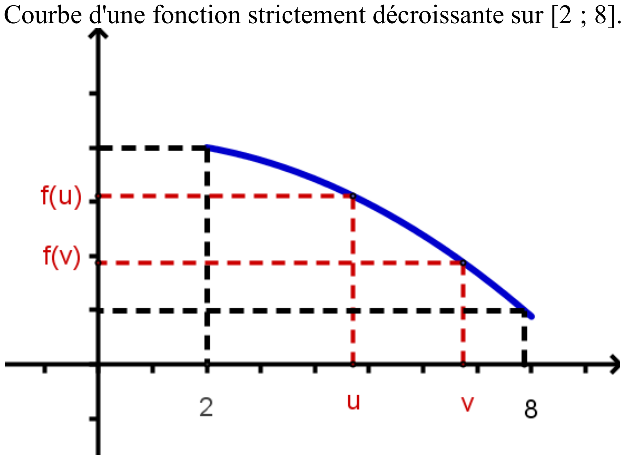
$$\text{si } u < v \text{ alors } f(u) \geq f(v).$$

Exemples :

Courbe d'une fonction strictement croissante sur [2 ; 8].



Courbe d'une fonction strictement décroissante sur [2 ; 8].



Définitions :

f est une fonction et I un intervalle contenu dans son ensemble de définition.

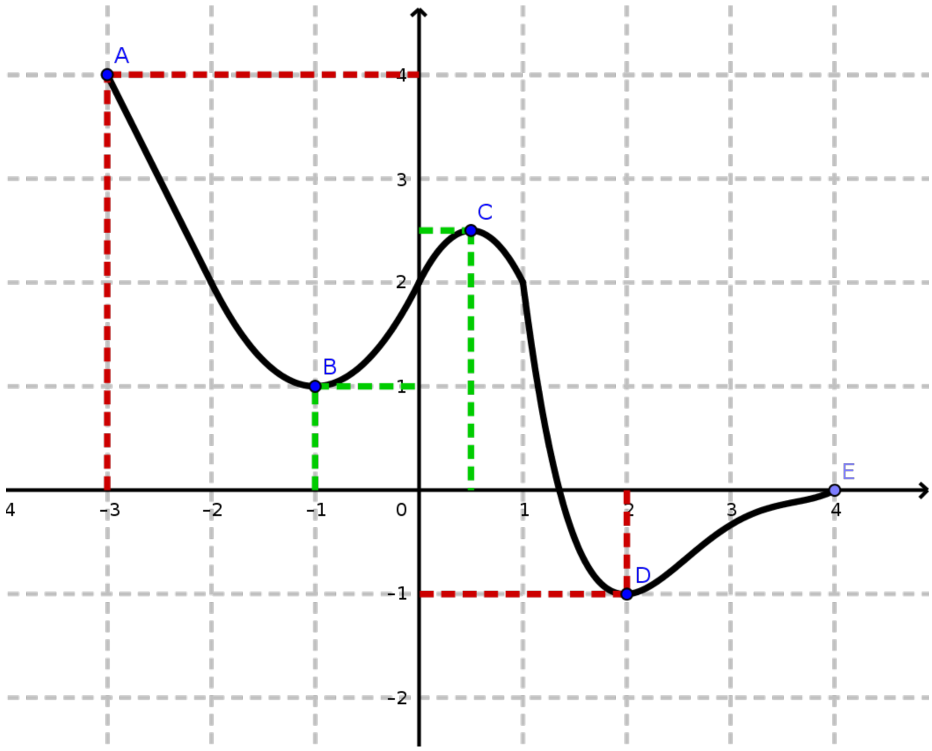
- *f* est **strictement monotone** sur l'intervalle I si *f* est soit strictement croissante sur I, soit strictement décroissante sur I
- *f* est **constante** sur l'intervalle I si, pour tous nombres u et v de l'intervalle I $f(u) = f(v)$.

2) Tableau de variation

Définition :

Un **tableau de variations** résume les variations d'une fonction.

Exemple :



Le tableau suivant donne les variations de la fonction *f* :

x	-3		-1		0,5		2		4
$f(x)$	4	↘	1	↗	2,5	↘	-1	↗	0

Remarque :

Dans le cas d'une fonction constante, on utilise une flèche horizontale.

3) Notions d'extremums

Définitions :

Soit f une fonction,

- Le **maximum** M de f sur un intervalle I est la plus grande valeur prise par $f(x)$ lorsque x parcourt cet intervalle.

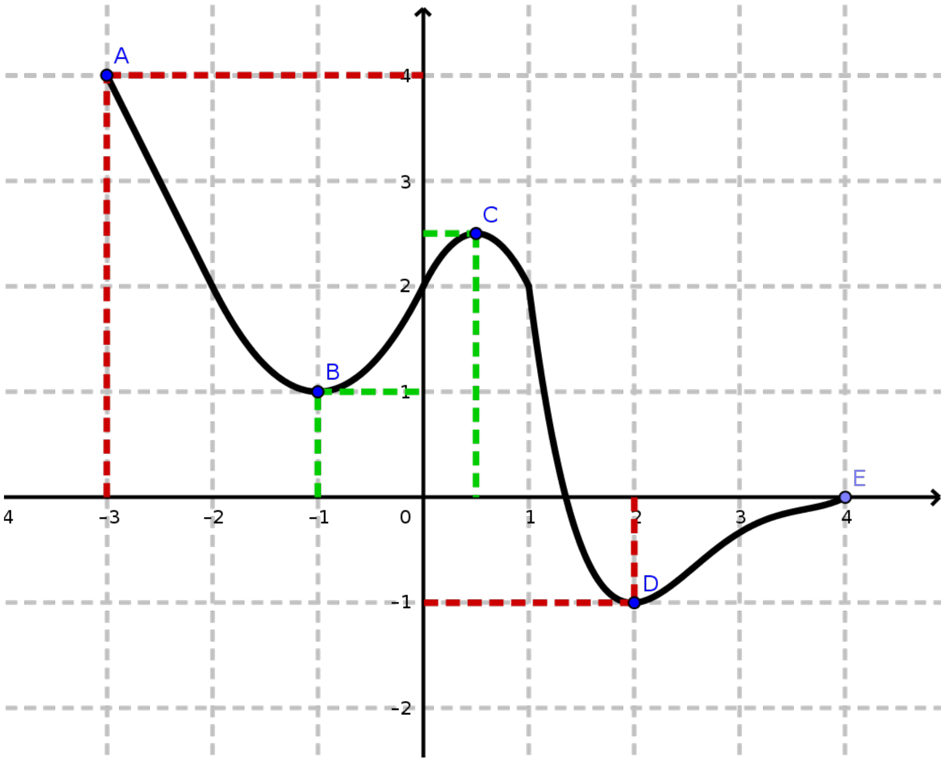
  On a alors pour tout $x \in I, f(x) \leq \mathrm{M}$.

- Le **minimum** m de f sur un intervalle I est la plus petite valeur prise par $f(x)$ lorsque x parcourt cet intervalle.

  On a alors pour tout $x \in I, f(x) \geq \mathrm{m}$.

- Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Exemple :



Les extremums de la fonction f « correspondent » aux points A et D.

Le maximum vaut 4 et est atteint lorsque $x = -3$.

Le minimum vaut -1 et est atteint lorsque $x = 2$.

Sur l'intervalle [-1 ; 1], le minimum vaut 1 et est atteint pour $x = -1$; le maximum vaut 2,5 et est atteint pour $x = 0,5$.

II. Résolution graphique d'inéquations

1) Inéquation de la forme f(x)>k

Définition :

Soient k un nombre réel et f une fonction de domaine de définition D.

On appelle **solution** de l'inéquation $f(x) > k$ tout réel a de D vérifiant $f(a) > k$.

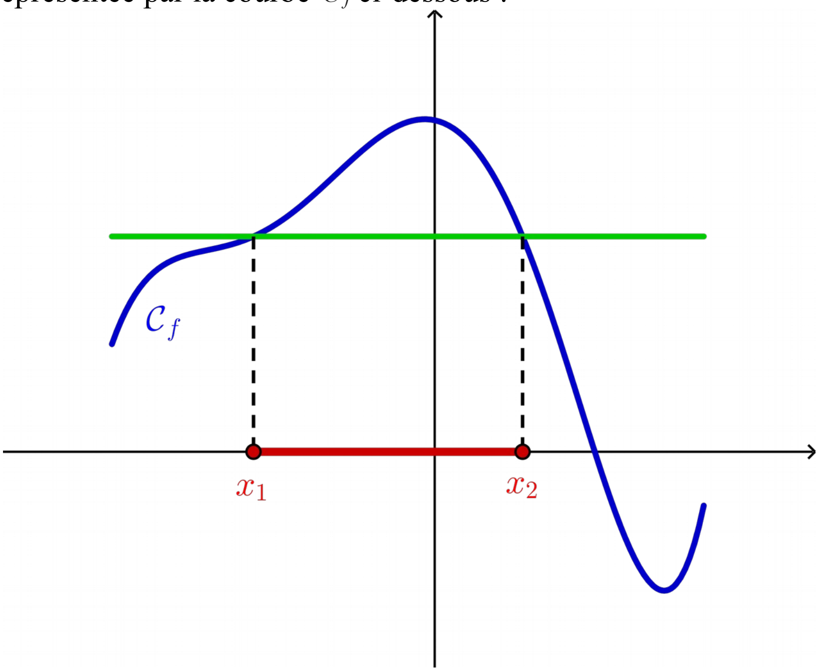
Résoudre l'inéquation $f(x) > k$ consiste à déterminer l'ensemble S de ses solutions.

Propriété :

Les solutions de l'inéquation $f(x) > k$ sont les **abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés **au-dessus** de la droite d'équation $y = k$.

Exemple :

Soit la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous :



L'inéquation $f(x) > k$ a pour solutions les réels de l'intervalle $]x_1 ; x_2[$.

2) Inéquation de la forme *f* (*x*) > *g* (*x*)

Définition :

Soient f et g définies sur le même domaine D.

On appelle **solution** de l'inéquation $f(x) > g(x)$ tout réel a de D vérifiant $f(a) > g(a)$.

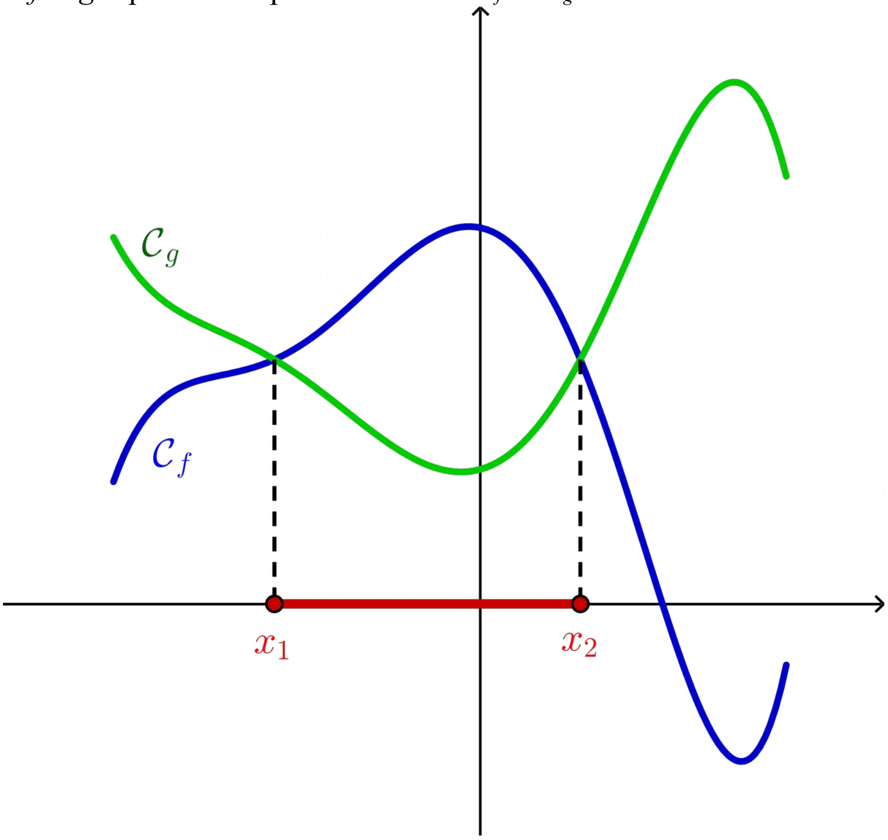
Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$ consiste à déterminer l'ensemble S de ses solutions.

Propriété :

Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont **les abscisses** des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés **au-dessus** de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Exemple :

Soit les fonctions f et g représentées par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ci-contre :



L'inéquation $f(x) > g(x)$ a pour solutions les réels de l'intervalle $]x_1\ ;\ x_2[$.