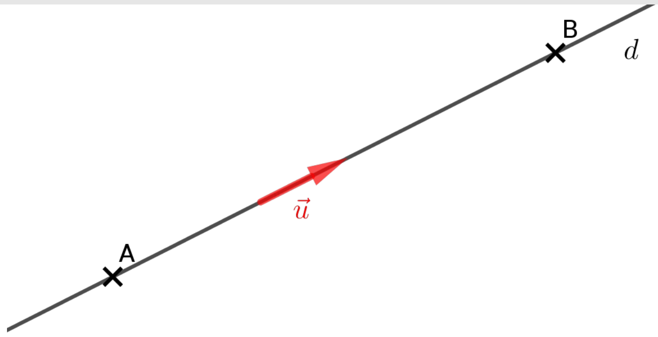
Chapitre 11
Droites dans le plan repéré

I. Équation cartésienne

1) Vecteur directeur

Définition :

Soient A et B deux points distincts d'une droite *d*, alors tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite *d*.



Remarques :

- Le vecteur $\vec{u}$ peut être remplacé par n'importe quel autre vecteur non nul qui lui est colinéaire, il n'est donc pas unique.
- La direction du vecteur directeur $\vec{u}$ définit la direction de la droite *d*.
- Deux droites parallèles ont la même direction : ainsi tout vecteur directeur de l'une est un vecteur directeur de l'autre.

Exemple :

Soit A(-2 ; 4) et B(6 ; 2), alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$ et donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

Propriété :

Une droite *d* peut être définie par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$.

On a alors : $M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

2) Équation cartésienne

Propriété :

Dans un repère du plan, les coordonnées (x ; y) de tous les points M d'une droite d vérifient une équation de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont des nombres réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls ((a ; b) $\neq$ (0 ; 0)).

Démonstration :

Soient A(x_A ; y_A) un point de la droite d et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d.

M(x ; y) $\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

M(x ; y) $\in d \Leftrightarrow$ det($\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$) = 0

M(x ; y) $\in d \Leftrightarrow \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$

M(x ; y) $\in d \Leftrightarrow \beta x - \alpha y + (-\beta x_A + \alpha y_A) = 0$

On obtient bien une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec :

$$a = \beta,\ b = -\alpha,\ c = -\beta x_A + \alpha y_A \text{ et } (\beta ;- \alpha) \neq (0 ; 0) \text{ car } \vec{u} \neq 0$$

Définition :

La relation $ax + by + c = 0$ s'appelle **équation cartésienne** de la droite d.

Exemple :

On considère la droite d passant par le point A(2 ;-1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

M(x ; y) $\in d \Leftrightarrow$ det($\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$) = 0 avec $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}$

M(x ; y) $\in d \Leftrightarrow 2(x - 2) - (-3)(y + 1) = 0$ soit $2x + 3y - 1 = 0$.

Ainsi une équation cartésienne de d est $2x + 3y - 1 = 0$.

Propriété :

Si les coordonnées (x ; y) d'un point M vérifient l'équation $ax + by + c = 0$, alors ils appartiennent à la droite dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

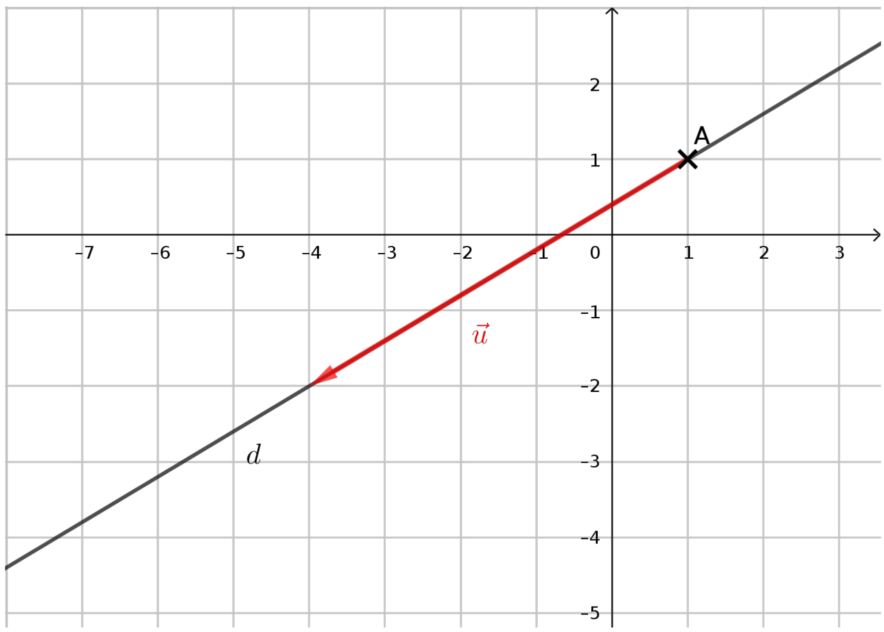
Remarques :

- Si $a = 0$ alors la droite est **horizontale** et donc parallèle à l'axe des abscisses.
- Si $b = 0$ alors la droite est **verticale** et donc parallèle à l'axe des ordonnées.
- Une droite d admet une infinité d'équations cartésiennes dont les coefficients sont deux-à-deux proportionnels.

Exemple :

On considère la droite d'équation cartésienne $-3x + 5y - 2 = 0$.

On trouve un point (A(1 ; 1) par exemple) et on utilise un vecteur directeur ($\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$ par exemple).



On peut également trouver deux points dont les coordonnées vérifient l'équation $-3x + 5y - 2 = 0$.

II. Équation réduite

1) Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Propriété :

Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$.

Si $b = 0$, alors la droite d est parallèle à l'axe des ordonnées et admet une équation de la forme :

$$x = k, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Définition :

La relation $x = k$ s'appelle **équation réduite** de la droite d.

Exemple :

Soit d la droite d'équation cartésienne $2x - 6 = 0$.

On a alors $x = \frac{6}{2} = 3$.

Tous les points de d ont donc la même abscisse 3.

Ainsi d est parallèle à l'axe des ordonnées.

L'équation réduite de d est $x = 3$.

Remarques :

- Tous les points de d ont la même abscisse k, et tout point d'abscisse k appartient à d.
- Si une droite est parallèle à l'axe des ordonnées, elle ne représente pas une fonction.

2) Droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Propriété :

Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec $b \neq 0$.

La droite d admet une unique équation de la forme $y = mx + p$.

Définition :

La relation $y = mx + p$ s'appelle **équation réduite** de la droite d.

Le réel m est le **coefficient directeur** de d et p son **ordonnée à l'origine**.

Exemple :

Soit d la droite d'équation cartésienne $-3x + 2y - 5 = 0$.

$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ est l'équation réduite de d.

Propriété :

Soit d une droite d'équation réduite $y = mx + p$.

$A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points distincts de d.

Le **coefficient directeur** de la droite d est le réel $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Remarque :

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d d'équation réduite $y = mx + p$.

Exemple :

Soit d la droite passant par les points A(-2 ; 1) et B(2 ; 3).

Le coefficient directeur de d est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{2+2} = \frac{2}{4} = 0,5$.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0,5\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de d.

Remarques :

- Une droite d'équation réduite $y = mx + p$ est la représentation graphique de la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$.
- Deux droites $d : y = mx + p$ et $d' : y = m'x + p'$ sont parallèles si, et seulement si, les coefficients directeurs m et m' sont égaux.
- Trois points A, B et C sont alignés lorsque les droites (AB) et (AC) sont confondues ; elles ont alors le même coefficient directeur.

III. Positions relatives de droites

Un **système linéaire** de **deux équations** à deux inconnues peut s'écrire :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

Du fait que $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ et $(a' ; b') \neq (0 ; 0)$, ces deux équations correspondent à des équations cartésiennes de deux droites d et d'.

1) Droites sécantes

Propriété :

Soient deux droites d et d' d'équations respectives :

$ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ où a, b, c, a', b', c' sont des réels.

Les droites d et d' sont **sécantes** si, et seulement si, $ab' - a'b \neq 0$.

Démonstration :

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de d et d'.

d et d' sont sécantes si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire le déterminant de ces vecteurs est différent de 0.

Ce déterminant est égal à $-ba' - (-b')a = ab' - a'b$.

Exemple :

Les droites $2x - 4y + 7 = 0$ et $3x + 5y + 7 = 0$ sont sécantes car $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car, $4 \times 3 - 2 \times (-5) = 22 \neq 0$.

Propriété :

Soient deux droites d d'équation $ax + by + c = 0$ et d' d'équation $a'x + b'y + c' = 0$

Si d et d' sont sécantes, elles ont un unique point d'intersection dont les coordonnées (x ; y) sont données par le couple solution du système $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$.

2) Droites parallèles

Propriété :

Soient deux droites d et d' d'équations respectives :

$$x = k_1 \text{ et } x = k_2$$

- Les droites d et d' sont **strictement parallèles** si, et seulement si, $k_1 \neq k_2$.
- Les droites d et d' sont **confondues** si, et seulement si, $k_1 = k_2$.

Exemple :

Les droites $x = 7$ et $x = -3$ sont strictement parallèles car $7 \neq -3$.

Propriété :

Soient deux droites d et d' d'équations respectives :

$ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ où a, b, c, a', b', c' sont des réels.

- Les droites d et d' sont **parallèles** si, et seulement si, $ab' - a'b = 0$.
- Les droites d et d' sont **confondues** si, et seulement si, les triplets (a ; b ; c) et (a' ; b' ; c') sont proportionnels.

Exemples :

- Les droites $3x + 2y - 6 = 0$ et $-7,5x - 5y + 2 = 0$ sont parallèles car $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-7,5\end{pmatrix}$ sont colinéaires car, $(-2) \times (-7,5) - 3 \times 5 = 0$.
- Les droites $-3x + 8y + 7 = 0$ et $6x - 16y - 14 = 0$ sont confondues, car le triplet (-3 ; 8 ; 7) et le triplet (6 ;-16 ;-14) sont proportionnels.