# Chapitre 8
# Colinéarité de vecteurs

## I. Vecteurs colinéaires

Le plan est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

### 1) Produit d'un vecteur par un nombre

**Définition :**

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur et λ un nombre réel.

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel λ est le vecteur $\lambda\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$.

**Exemple :**

I est le milieu d'un segment [AB]équivaut à $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .

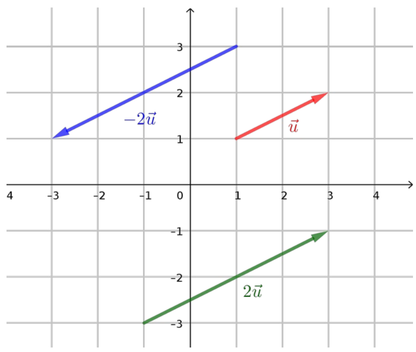
**Propriétés :**

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout nombre réel λ.

- $\lambda\vec{u}$ a **même direction** que $\vec{u}$
- Si **λ > 0**, alors $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ sont de **même sens**.
- Si **λ < 0**, alors $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ sont de **sens contraire**.
- $\|\lambda\vec{u}\|=|\lambda|\|\vec{u}\|$

**Exemple :**

Dans la base ci-contre, $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $2\vec{u}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $-2\vec{u}=\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$.

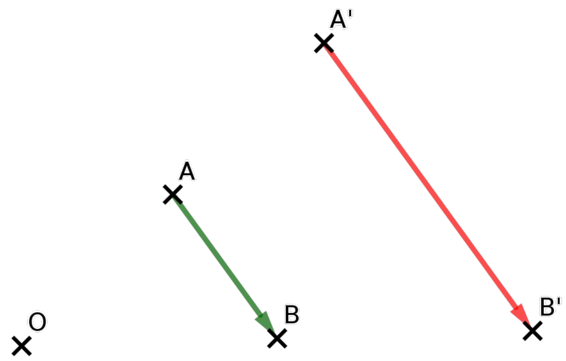



**Remarques :**

- Quel que soit le réel λ, $\lambda\vec{0}=\vec{0}$ .
- Quel que soit le vecteur $\vec{u}$ , $0\vec{u}=\vec{0}$

**Propriétés :**

Si une homothétie de centre O et de rapport λ transforme un point A en un point A' et un point B en un point B', alors $\overrightarrow{A'B'}=\lambda\overrightarrow{AB}$




## 2) Règles de calcul

**Propriétés :**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels λ et λ' :

- $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$
- $(\lambda+\lambda')\vec{u}=\lambda\vec{u}+\lambda'\vec{u}$
- $\lambda(\lambda'\vec{u})=(\lambda\lambda')\vec{u}$

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout nombre réel λ :

$\lambda\vec{u}=\vec{0}$ si, et seulement si, $\lambda=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$

**Exemples :**

- $3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EF})=3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{EF}$
- $2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{EF})=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{EF}$
- $2\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AB}=(2-5)\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AB}$
- $-5(2\overrightarrow{AB})=-10\overrightarrow{AB}$

## 3) Colinéarité de vecteurs

**Définition** :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si, et seulement si, il existe un réel λ tel que $\vec{u}=\lambda\vec{v}$ ou $\vec{v}=\lambda\vec{u}$ .

**Remarques :**

- Deux vecteurs, non nuls, sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

**Exemple :**

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\20\end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{v}=-4\vec{u}$ .

**Propriété** :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ , non nuls, sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.

*Démonstration :*

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe λ tel que $\vec{u}=\lambda\vec{v}$ si, et seulement si, les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles.

# II. Applications

Le plan est muni d'une base ( $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ).

## 1) Déterminant

**Définition** :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

On appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre det( $\vec{u}$ , $\vec{v}$ ) = $xy' - yx'$.

**Remarque :**

On note aussi det( $\vec{u}$ , $\vec{v}$ ) = $\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}$ .

**Propriété** :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si, et seulement si, det( $\vec{u}$ , $\vec{v}$ ) = 0.

**Exemple :**

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\20\end{pmatrix}$ sont colinéaires car 2 × 20 – (-5) × (-8) = 40 – 40 = 0.

**Remarques :**

- det( $\vec{u}$ , $\vec{u}$ ) = 0
- det( $\vec{v}$ , $\vec{u}$ ) = - det( $\vec{u}$ , $\vec{v}$ )

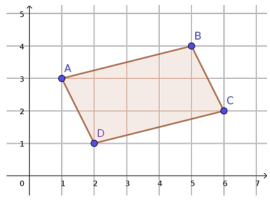
**Propriété** :

L'aire du parallélogramme ABCD est égale à $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$ .

**Exemple :**

Soit ABCD un parallélogramme tel que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

det( $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{AD}$ ) = -9. L'aire de ABCD est égale à 9 u.a.




## *2)* Parallélisme

**Propriété** :

Soient A, B, C et D quatre points distincts.

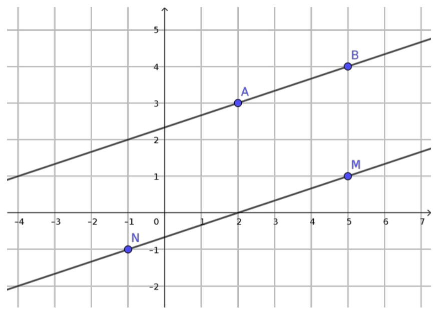
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**.

**Exemple :**

Soit A(2 ; 3), B(5 ; 4), M(5 ; 1) et N(-1 ; -1).

On a donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi det( $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{MN}$ ) = $3 \times 1 - 1 \times 3 = 3 - 3 = 0$.




Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires et les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

**Propriété** :

Trois points distincts A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

**Remarque :**

Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les droites (AB) et (AC) sont parallèles. Mais comme elles ont un point commun, elles seront confondues, donc les points A, B et C sont alignés.

**Exemple :**

Soit A(-4 ; 3), B(7 ; 0) et C(0 ; 2).

On a donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

Ainsi det( $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{AC}$ ) = $11 \times (-1) - 4 \times (-3) = (-11) - (-12) = 1 \neq 0$.