Chapitre 4

Trigonométrie

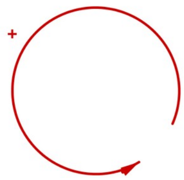
I. Radian et cercle trigonométrique

1) Cercle trigonométrique

Définition :

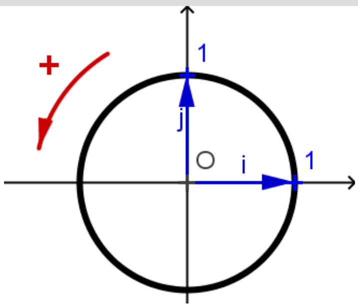
Le plan est dit **orienté** lorsque l'on a choisi un sens positif de rotation.

Remarque :
Dans le plan, par convention, on définit le sens positif comme l'inverse de celui des aiguilles d'une montre. Il est appelé **sens trigonométrique**.



Définition :

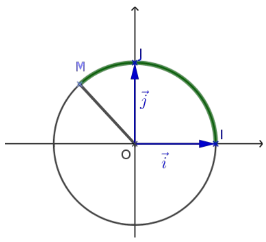
Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et orienté, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.



Propriété :

Sur le cercle trigonométrique, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ (exprimé dans l'unité de longueur du repère) est **proportionnelle** à la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ exprimée en degré.

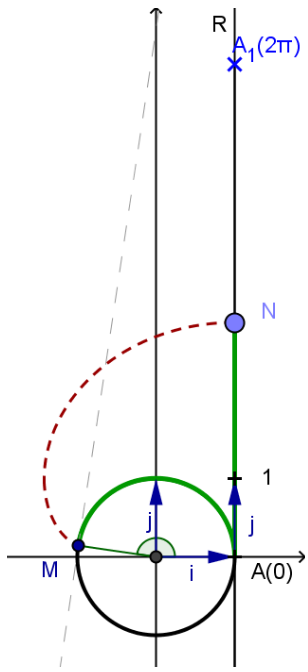
Mesure de $\widehat{IOM}$ en degré	360	180	90	270
Longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$



2) Repérage sur le cercle trigonométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

Soit A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et d la droite orientée, perpendiculaire à l'axe perpendiculaire à l'axe des abscisses, qui passe par A, munie du repère $(A; \vec{j})$.



En « enroulant » cette droite d autour du cercle $\mathscr{C}$, on obtient une correspondance entre un point N de la droite d et un unique point M du cercle $\mathscr{C}$.

Remarque :

Le point A_1 de d d'abscisse 2π dans le repère $(A; \vec{j})$ se retrouve ainsi en A.

Exemple :

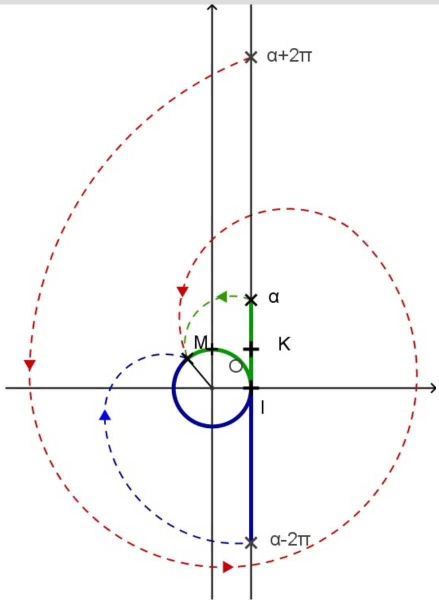
Sur la figure ci-contre, le point N d'abscisse 3 sur la droite orientée d, se retrouve, après « enroulement » de d sur $\mathscr{C}$, en M tel que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est égale à la longueur AN.

Propriétés :

- Pour tout nombre réel α, le point d'abscisse α sur d coïncide avec un unique point M du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

  M s'appelle le **point-image** de α sur le cercle trigonométrique.
- Tout point de $\mathscr{C}$ est l'image d'une infinité de réels.

  Si α est l'un d'eux, les autres sont réels $\alpha + k \times 2\pi$, où k est un entier relatif ($k \in \mathbb{Z}$).



Démonstration :

Comme le cercle trigonométrique est de rayon 1, son périmètre est de longueur 2π.

Le point de *d* d'abscisse $\alpha + 2\pi$ se retrouve donc, après enroulement, au même endroit que le point de *d* d'abscisse α.

Il en est de même si on ajoute à α un multiple de 2π.

Remarque :

On dit que α et $\alpha + 2k\pi$ sont égaux à 2π près. Ou encore que α est égal $\alpha + 2k\pi$ **modulo** 2π.

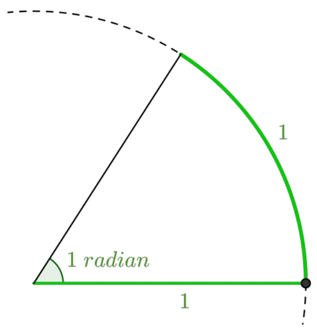
$\pi \equiv 3\pi\ [2\pi]$ ou $-\pi \equiv 5\pi\ [2\pi]$.

3) Le radian

Définition :

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

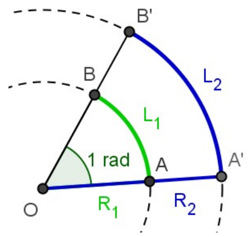
On appelle **radian** la mesure d'un angle qui intercepte un arc dont la longueur est égale à 1.



Remarque :

Cette définition ne dépend pas du rayon R de l'arc.

Le rapport de la longueur de l'arc par le rayon correspondant est constant : $\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$

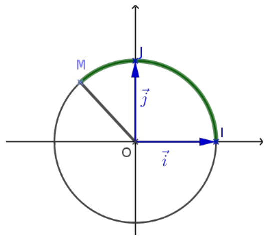


Propriété :

La mesure en **radian** de l'angle $\widehat{IOM}$

- est égale à la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$ mesurée dans le sens trigonométrique.
- est proportionnelle à la mesure, en degré de l'angle qui intercepte cet arc.

Mesure de $\widehat{IOM}$ en degré	0	30	45	60	90	180	360
Mesure de $\widehat{IOM}$ en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π



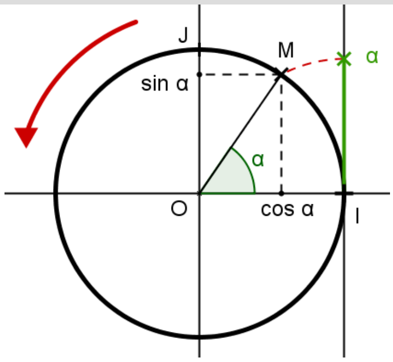
II. Cosinus et sinus d'un angle

1) Cosinus et sinus

Définitions :

Soit M l'image d'un réel α sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

- Le **cosinus** de α, noté cos α, est l'abscisse de M.
- Le **sinus** de α, noté sin α, est l'ordonnée de M.



Remarque :

Les coordonnées du point M, situé sur le cercle trigonométrique, sont (cos α ; sin α).

Exemple :

Le nombre réel $\frac{\pi}{2}$ a pour image le point J de coordonnées (0 ; 1) donc :

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ et } \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Propriétés :

Pour tout réel α et pour tout entier relatif k :

- $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin \alpha \leqslant 1$
- $\cos(\alpha + k \times 2\pi) = \cos \alpha$
- $\sin(\alpha + k \times 2\pi) = \sin \alpha$

Démonstrations :

- Soit K le projeté orthogonal de M sur l'axe $(O\,;\vec{j})$.

  Le théorème de Pythagore donne $OK^2 + KM^2 = OM^2$ soit $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- Le cercle trigonométrique est de rayon 1 ; on a donc $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin \alpha \leqslant 1$.

Exemple :

$$\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}=\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)^2=1$$

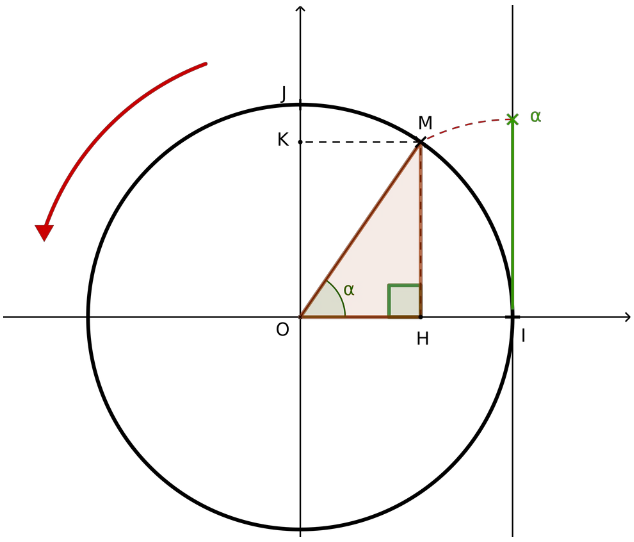
Remarque :

En notant H, le projeté orthogonal de M sur l'axe $(O\,;\vec{i})$.

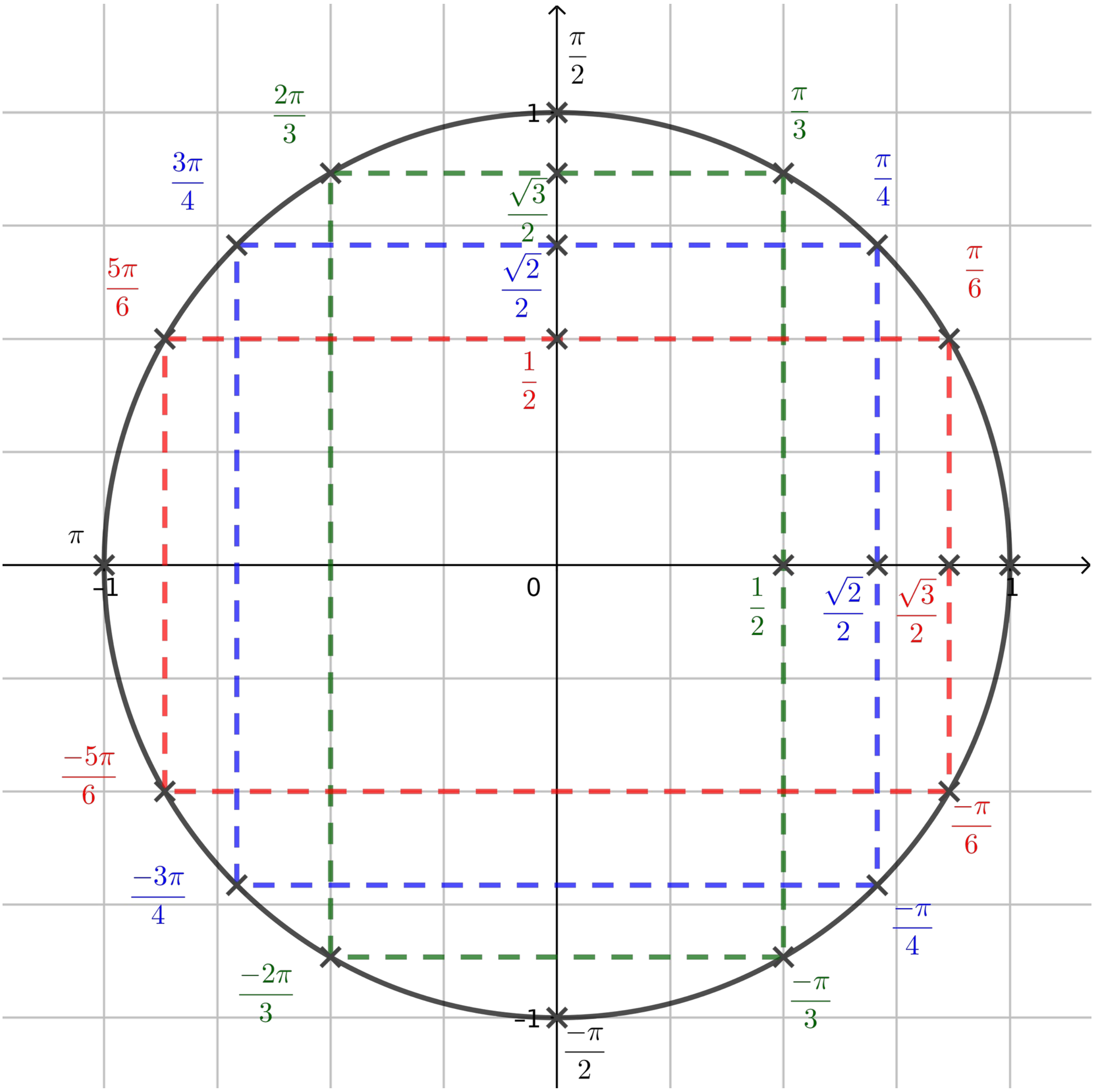
On a donc le triangle OHM rectangle en H.

Ainsi $\cos\widehat{IOM}=\dfrac{OH}{OM}=\dfrac{OH}{1}=OH=\cos\alpha$

et $\sin\widehat{IOM}=\dfrac{HM}{OM}=\dfrac{HM}{1}=HM=\sin\alpha$



2) Valeurs remarquables



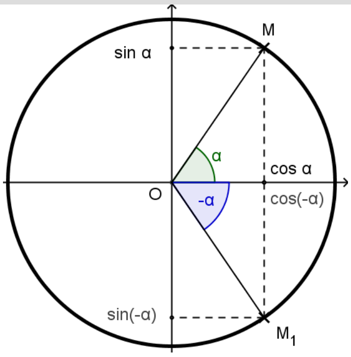
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3) Angles associés

Propriétés :

Pour tout nombre réel α,

- cos(-α) = cos α
- sin(-α) = -sin α



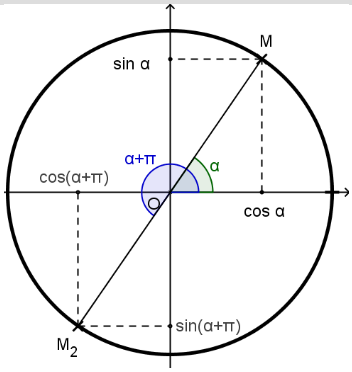
Démonstration :

Les angles de mesure α et -α sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriétés :

Pour tout nombre réel α,

- cos(α + π) = -cos α
- sin(α + π) = -sin α



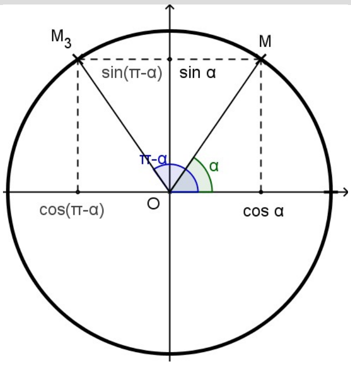
Démonstration :

Les angles de mesure α et α + π sont symétriques par rapport à l'origine.

Propriétés :

Pour tout nombre réel α,

- cos(π – α) = -cos α
- sin(π – α) = sin α



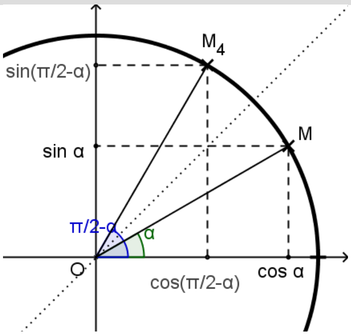
Démonstration :

Les angles de mesure α et π – α sont symétriques par rapport à l’axe des ordonnées.

Propriétés :

Pour tout nombre réel α,

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$



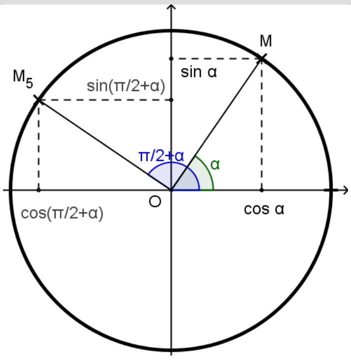
Démonstration :

Les angles de mesure α et $\frac{\pi}{2}-\alpha$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Propriétés :

Pour tout nombre réel α,

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$



Démonstration :

Les angles de mesure $\frac{\pi}{2}+\alpha$ et $\frac{\pi}{2}-\alpha$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

En effet, on a $\frac{\pi}{2}+\alpha=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$

et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$