Chapitre 7
Produit scalaire

I. Produit scalaire

1) Norme d'un vecteur

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, et soit A et B deux points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

La **norme** du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la **longueur** du segment $[AB]$; on a :

$$\|\vec{u}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB \text{ .}$$

Remarque :

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

- Pour tout nombre réel k, on a $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$ (notamment, $\|-\vec{u}\|=\|\vec{u}\|$).
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leqslant\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire).
- $\|\vec{u}\|=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$.

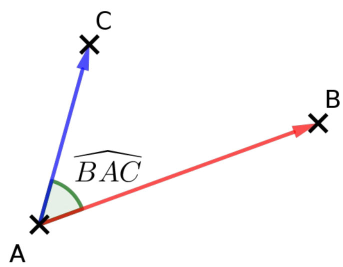
2) Produit scalaire de deux vecteurs

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B et C trois points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre réel défini par :

- si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et si $\vec{v}\neq\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{BAC})=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.
- si $\vec{u}=\vec{0}$ ou si $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$



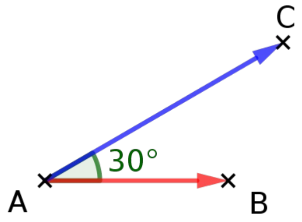
Exemple :

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ tel que :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = 2 \text{ et } \|\overrightarrow{AC}\| = AC = 3 \text{ et } \widehat{BAC} = 30°$$

Leur produit scalaire vaut :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$



Remarque :

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est indépendant des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On peut donc prendre des vecteurs de même origine.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux **vecteurs colinéaires** du plan.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ s'ils sont de **même sens**.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ s'ils sont de **sens contraires**.

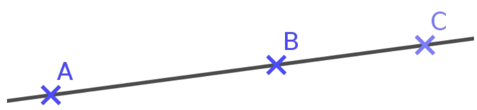
Démonstration :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\widehat{BAC}$ = 0° et donc $\cos(\widehat{BAC}) = 1$ et donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors $\widehat{BAC}$ = 180° et donc $\cos(\widehat{BAC}) = -1$ et donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Exemple :

Soit trois points alignés A, B et C alignés dans cet ordre sur une droite graduée, tels que :

AB = 3 et BC = 2



alors on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC = 15$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \times BC = -6$, $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \times CA = 10$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = -AB \times CB = -6$

Propriété :

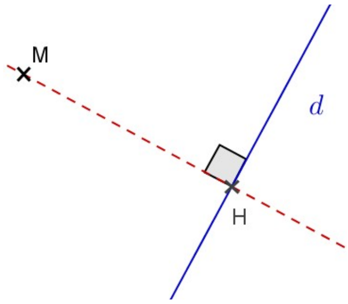
On appelle **carré scalaire** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le nombre $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$. On le note $\overrightarrow{AB}^2$.

On a alors $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

3) Formule des projetés orthogonaux

Définition :

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur une droite (d) est le point d'intersection de la droite (d) et de la droite perpendiculaire à (d) passant par le point M.



H est le projeté orthogonal de M sur (d)

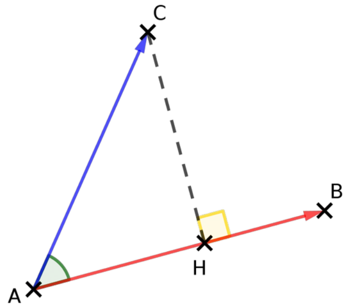
Propriété :

Soient A, B et C trois points du plan.

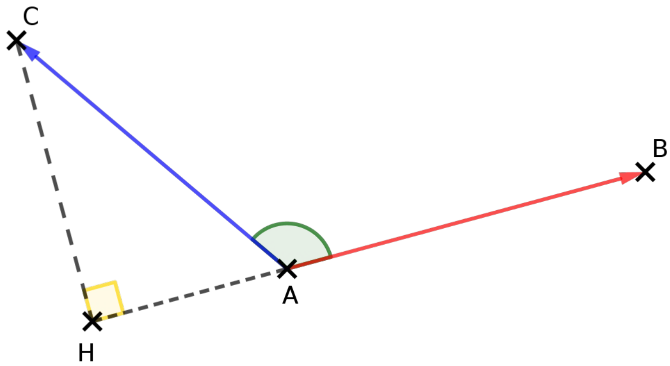
Si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) alors $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\vec{AB}\cdot\vec{AH}$.

Remarques :

- Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont colinéaires.
- Si $\widehat{BAC}<\frac{\pi}{2}$, alors $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=AB\times AH$.

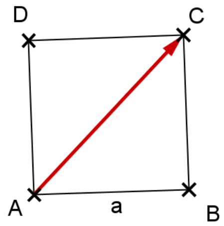


- Si $\widehat{BAC}>\frac{\pi}{2}$, alors $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=-AB\times AH$.



Exemple :

Soit ABCD un carré de côté a.



On a alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=a^2$$

Car le point C se projette orthogonalement en B sur (AB).

4) Formule avec les coordonnées

Propriété :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On a alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'.$$

Cette forme est l'**expression analytique** du produit scalaire.

Remarque :

On retrouve bien $\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$.

Exemple :

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=2\times1+(-1)\times3=-1$ et $\|\vec{u}\|^2=2^2+(-1)^2=5$, d'où $\|\vec{u}\|=\sqrt{5}$.

II. Propriétés du produit scalaire

1) Symétrie et bilinéarité

Propriétés :

- Le produit scalaire de deux vecteurs est **symétrique** :

  pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

- Le produit scalaire de deux vecteurs est **bilinéaire**, c'est-à-dire que :

  pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel λ, on a :

  $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Démonstration :

On munit le plan d'un repère orthonormé.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ trois vecteurs du plan et λ un nombre réel.

On utilise l'expression analytique du produit scalaire et les propriétés de la multiplication des nombres réels (commutativité et distributivité).

- Symétrie :

  $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'=x'x+y'y=\vec{v}\cdot\vec{u}$

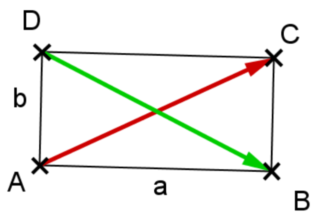
- Bilinéarité :

  $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=(\lambda x)x'+(\lambda y)y'=\lambda xx'+\lambda yy'=\lambda\times(xx'+yy')=\lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$

  $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=x(x'+x'')+y(y'+y'')=xx'+xx''+yy'+yy''=(xx'+yy')+(xx''+yy'')=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Exemples :

- $5\vec{u}\cdot(3\vec{v}-2\vec{w})=5\vec{u}\cdot(3\vec{v})-5\vec{u}\cdot(2\vec{w})=15\vec{u}\cdot\vec{v}-10\vec{u}\cdot\vec{w}$.
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot(-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$.
- Soit $ABCD$ un rectangle avec $AB=a$ et $AD=b$.



  En utilisant la relation de Chasles, on peut décomposer les vecteurs et développer grâce aux propriétés du produit scalaire :

  $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$

  $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\vec{0}+AB\times AB-BC\times DA+\vec{0}=a^2-b^2$

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ du plan, on a :

- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ soit $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ soit $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$ soit $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Démonstration :

On utilise les propriétés de symétrie et de bilinéarité du produit scalaire :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}^2=\vec{u}^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$$

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ du plan, on a :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Exemple :

Si AB = 6, AC = 5 et CB = 4, alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-CB^2\right)=\frac{1}{2}\left(6^2+5^2-4^2\right)=\frac{1}{2}(36+25-16)=\frac{45}{2}$$

2) Orthogonalité

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, et soit *A*, *B*, *C* et *D* quatre points tels que :

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{v}=\overrightarrow{CD}.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

On écrit $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Démonstration :

Soit A, B et C trois points du plan distincts deux à deux tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)=0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2=\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.

Or $\|\vec{u}\|^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$, $\|\vec{v}\|^2=\|\overrightarrow{AC}\|^2=AC^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\|^2=\|\overrightarrow{CB}\|^2=BC^2$

Ainsi $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow AB^2+AC^2=BC^2 \Leftrightarrow$ ABC est rectangle en A (théorème de Pythagore).

On conclut $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Remarques :

- Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.
- Le théorème nous donne une condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité de deux droites : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.
- Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$.

  Il ne faut pas en conclure que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égaux.

  En effet, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=0$

  Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}-\vec{w}$ sont orthogonaux.

Propriété :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si :

$$xx'+yy'=0 .$$

Exemple :

Dans la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$, on peut montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3-\sqrt{5}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3+\sqrt{5}\\-2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

En effet : $\vec{u}\cdot\vec{v}=(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})+2\times(-2)=3^2-(\sqrt{5})^2-4=9-5-4=0$,

III. Vecteur normal

Dans toute cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Généralités

Définition :

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

Un **vecteur normal** à la droite (d) est un vecteur non nul orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

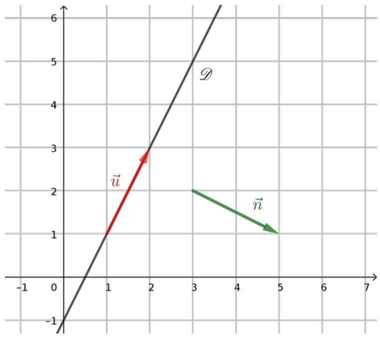
Exemple :

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

En effet, $\vec{n}\cdot\vec{u}=-2\times1+1\times2=0$.

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$,

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal de $\mathscr{D}$.



Propriétés :

Soit (d) une droite et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

- Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d), alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d).
- Tout vecteur normal à (d) est orthogonal à tout vecteur directeur de (d).

Exemple :

Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur normal $\vec{n}$.

Les vecteurs $\vec{n}$ et $-2\vec{n}$ sont colinéaires, donc le vecteur $-2\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

Propriété :

Soit (d) une droite passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Un point M appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Exemple :

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A(1 ; 2) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

Soit le point B(4 ; 3).

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=(4-1)\times(-1)+(3-2)\times3=-3+3=0$.

Le point B appartient donc a $\mathscr{D}$.

2) Équation cartésienne

Propriété :

Soit a et b deux nombres réels non nuls tous les deux $((a;b)\neq(0;0))$.

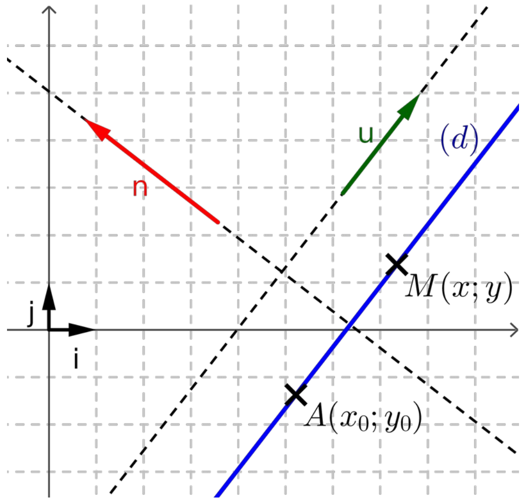
La droite (d) admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ pour **vecteur normal** si, et seulement si, elle admet une **équation cartésienne** de la forme $ax+by+c=0$, où $c\in\mathbb{R}$.

Démonstration :

Soit (d) une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $A(x_0;y_0)$ un point de (d).

Un point $M(x;y)$ du plan appartient à la droite (d) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, autrement dit si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Or les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont $\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$; le produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}$ vaut donc $a(x-x_0)+b(y-y_0)$.



Remarques :

- Une droite peut donc être complètement définie par la donnée d'un point et d'un vecteur normal.
- Dans un repère orthonormé du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, une droite (d) d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

  De plus, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ont la même norme.

Exemples :

- Un point M appartient à la droite qui passe par A(-2 ; 3) et qui a pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ si et seulement si $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ $\Leftrightarrow 2(x+2)+5(y-3)=0 \Leftrightarrow 2x+5y-11=0$.
- Soit (d) la droite d'équation $-2x+5y-18=0$.

  Un vecteur normal à (d) est $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$.