

# Chapitre 5

## Les suites

### I. Suites numériques

#### 1) Définition

##### Définition :

Une **suite numérique** est fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto u(n)$$

pour tout entier naturel  $n$ ,  $u(n)$ , noté aussi  $u_n$ , est le **terme** de **rang**  $n$  de la suite.

On note  $(u_n)$  l'ensemble des termes de la suite pour  $n \in \mathbb{N}$ .

##### Exemples :

- Le tableau ci-dessous donne le nombre de bacheliers en France de 2000 à 2009.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Nombre de bacheliers	516550	499228	493755	502671	498372	506608	524057	521353	512815	530218

La suite  $(u_n)$  du nombre de bacheliers peut être définie en choisissant comme rang  $n$  le nombre d'années écoulées depuis l'an 2000.

On a alors :  $u_0 = 516550$  le nombre de bacheliers de l'année 2000 ;

$u_5 = 506608$  le nombre de bacheliers de l'année 2005.

502671 est le terme de rang 3 de la suite  $(u_n)$ .

- Soit  $(v_n)$  la suite des multiples de 7 avec  $v_0 = 0$ . On a alors  $v_1 = 7, v_2 = 14, \dots, v_9 = 63, \dots$

##### Remarques :

- Le terme de rang  $n$  d'une suite  $u$  peut être noté  $u(n)$  ou  $u_n$ .
- Certaines suites peuvent être définies seulement à partir d'un rang  $n_0$  autre que 0.

Par exemple, pour des questions pratiques, on aurait pu définir la suite de l'exemple précédent à partir du rang 2000, avec  $u_{2000} = 516550$ .

Dans d'autres situations, la définition de la suite interdit l'existence de certains termes. Par exemple la suite  $(u_n)$  telle que  $u_n = \frac{1}{n}$  ne peut être définie que pour  $n \geq 1$ .

## 2) Mode de génération d'une suite

### Définition :

Une suite peut être définie :

- au moyen d'une **fonction**  $f$  de la variable  $n$  :  $u_n = f(n)$  .
- au moyen d'une **relation de récurrence** :  $(u_n)$  est alors définie par son **premier terme** et une **relation de récurrence** permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.
- par un autre moyen, par exemple par un **algorithme**, par un **motif géométrique**, par certaines propriétés (la suite des décimales de  $\pi$ ), ...

### Suite explicite

#### Définition :

Soit  $a$  un réel  $f$  une fonction définie sur  $[a ; +\infty[$  .

On peut définir une suite, par une **formule explicite**,  $(u_n)$  en posant pour tout entier  $n \geq a$  :

$$u_n = f(n)$$

#### Exemple :

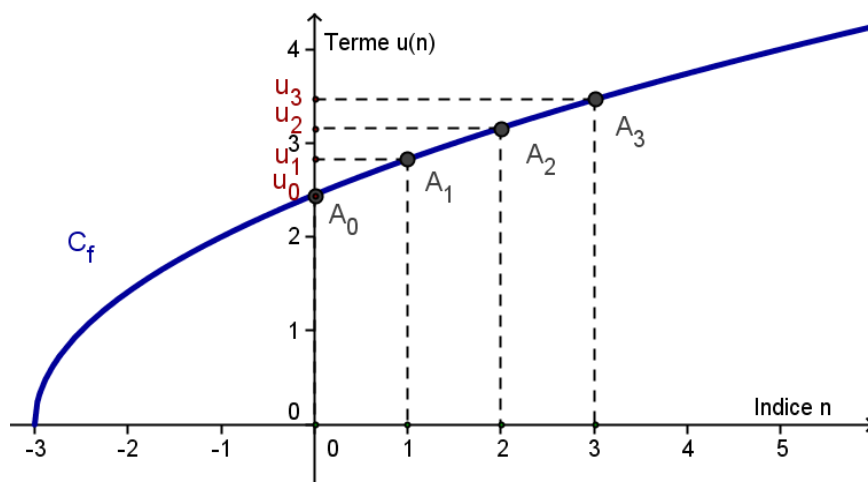
Soit la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = \sqrt{2n+6}$  .

Ainsi pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_n = f(n)$  où  $f$  est définie sur  $[-3 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \sqrt{2x+6}$$

$$u_0 = f(0) = \sqrt{2 \times 0 + 6} = \sqrt{6} ; u_1 = f(1) = \sqrt{2 \times 1 + 6} = \sqrt{8} ; u_2 = f(2) = \sqrt{10} ; \dots ;$$

$$u_{100} = f(100) = \sqrt{206}$$



Graphiquement les termes de la suite  $(u_n)$  sont les ordonnées des points  $A_n(n ; u_n)$  d'abscisses entières de la courbe  $C_f$  .

#### Remarque :

On peut calculer **directement** chaque terme à partir de son rang (ou indice).

## Suite récurrente

### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $I$ .

On suppose que, si  $x \in I$ , alors  $f(x) \in I$ .

Soit  $a$  un nombre réel de  $I$  et  $p$  un entier.

On peut définir une suite, **par récurrence**,  $(u_n)$  en posant :

$$\begin{cases} u_p = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier } n \geq p \end{cases}$$

### Exemple :

Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = -1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 6}$ .

Ainsi, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f$  est définie sur  $[-3; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{2x+6}$

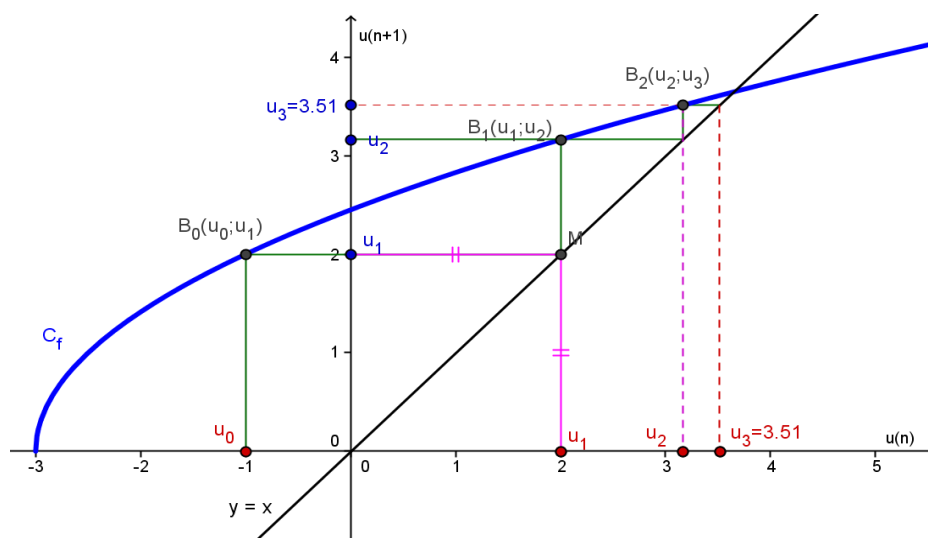
$u_0 = -1$  ;  $u_1 = f(u_0) = \sqrt{2u_0+6} = \sqrt{2 \times (-1) + 6} = 2$  ;  $u_2 = f(u_1) = \sqrt{2u_1+6} = \sqrt{2 \times 2 + 6} = \sqrt{10}$  ; ...

Graphiquement,  $B_0(u_0; u_1)$  appartient à la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

Pour déterminer  $B_1(u_1; u_2)$ , il faut placer  $u_1$ , l'ordonnée de  $B_0$ , en abscisse.

On « reporte » donc  $u_1$  sur l'axe  $(Ox)$  en utilisant la droite  $\Delta : y = x$ .

On poursuit de même pour construire  $B_2(u_2; u_3)$ ,  $B_3(u_3; u_4)$ , ...



### Remarques :

- Lorsqu'une suite est définie par récurrence, on ne peut pas calculer directement un terme à partir de son rang ; il faut procéder de « proche en proche » : pour calculer le dixième terme, on utilise la valeur du neuvième, obtenue elle-même grâce au huitième terme, ...
- Le « **principe de récurrence** » est une propriété fondamentale dans la construction des nombres.

On peut le résumer ainsi : « En partant de 0, et en ajoutant 1 à chaque étape, on construit l'ensemble des entiers naturels ».

### Définition :

Soit  $p$  un entier, et  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies à partir du rang  $p$ .

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont **égales** si pour tout entier  $n \geq p$ ,  $u_n = v_n$ .

### Remarque :

Si les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont le **même premier terme** et vérifient la **même relation de récurrence** alors elles sont **égales**.

## 3) Sens de variation d'une suite

### Définitions :

Soit une suite  $(u_n)$  et un entier  $p$ .

- La suite numérique  $(u_n)$  est **croissante** à partir du rang  $p$  si pour tout entier  $n \geq p$  :

$$u_{n+1} \geq u_n$$

- La suite numérique  $(u_n)$  est **décroissante** à partir du rang  $p$  si pour tout entier  $n \geq p$  :

$$u_{n+1} \leq u_n$$

- La suite numérique  $(u_n)$  est **constante** (ou **stationnaire**) à partir du rang  $p$  si pour tout entier  $n \geq p$  :

$$u_{n+1} = u_n$$

### Remarques :

- La suite numérique  $(u_n)$  est monotone à partir du rang  $p$  si elle est soit croissante à partir du rang  $p$ , soit décroissante à partir du rang  $p$ .
- Lorsqu'on ne précise pas « à partir du rang  $p$  », cela signifie que la suite est croissante, décroissante, monotone, constante à partir de son premier terme.

### Exemples :

- La suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = \frac{5}{n+1}$  est strictement décroissante.

$$\text{En effet, pour tout entier } n, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+1)+1} - \frac{5}{n+1} = \frac{-5}{(n+1)(n+2)}.$$

Donc pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n < 0$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} < u_n$ .

- La suite  $(v_n)$  de terme général  $u_n = 5 \times (-0,8)^n$  n'est pas monotone.

En effet, chaque terme d'indice pair, qui est positif, est supérieur au terme précédent d'indice impair, qui est négatif, et supérieur au terme suivant également négatif.

- La suite  $w$  définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{1}{w_n} + 1 \end{cases}$$
 n'est pas monotone.

En effet  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = \frac{1}{1} + 1 = 2$  donc  $w_0 < w_1$ . Et  $w_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ , donc  $w_1 > w_2$ .

### Propriétés :

Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[a ; +\infty[$ .

Soit un entier  $p \geq a$  et la suite  $u$  définie pour tout entier  $n \geq p$  par  $u_n = f(n)$ .

- Si la **fonction**  $f$  est (strictement) **croissante** sur  $[p ; +\infty[$ , alors la **suite**  $(u_n)$  est (strictement) **croissante** à partir du rang  $p$ .
- Si la **fonction**  $f$  est (strictement) **décroissante** sur  $[p ; +\infty[$ , alors la **suite**  $(u_n)$  est (strictement) **décroissante** à partir du rang  $p$ .

### Démonstration :

- Supposons  $f$  croissante sur l'intervalle  $[k ; +\infty[$ .

Alors pour tout réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $[k ; +\infty[$ , si  $a < b$  alors  $f(a) < f(b)$ .

Pour tout entier  $n \geq k$ , comme  $n < n + 1$ , on aura  $f(n) < f(n + 1)$ , c'est-à-dire  $u_n < u_{n+1}$ . On en déduit que  $(u_n)$  est croissante pour  $n \geq k$ .

- On démontre de même que  $(u_n)$  est décroissante pour  $n \geq k$  lorsque  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $[k ; +\infty[$ .

### Exemple :

Dans l'exemple précédent, la suite  $(u_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = f(n)$  avec  $f(x) = \frac{5}{x+1}$ .

Or  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  donc la suite  $(u_n)$  est décroissante.

## **4) Comportement d'une suite à l'infini**

Soit les suites  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $t$  définies sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_n = n^2 \quad ; \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n+2} + 1 \quad ; \quad w_n = -2n^2 + 2 \quad ; \quad t_n = \cos n + 1$$

- $(v_n)$  peut être rendu aussi proche de 1 qu'on veut si  $n$  est choisi suffisamment grand.

Pour tout entier  $n > 98$ , on a  $|v_n - 1| < 0,01$  ; pour tout  $n > 10^6 - 2$ ,  $|v_n - 1| < 10^{-6}$ .

Plus généralement, pour tout écart  $\varepsilon > 0$ , dès que  $n > \frac{1}{\varepsilon} - 2$ , on a :  $|v_n - 1| < \varepsilon$ , c'est-à-dire que la distance entre  $v_n$  et 1 est inférieure à  $\varepsilon$ .

On dit que  $(v_n)$  **converge** vers 1 et on note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ .

### Définition :

On dit qu'une suite numérique  $(u_n)$  admet une limite réelle  $\ell$  si tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont proches de  $\ell$  à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite est **convergente** vers  $\ell$ .

- $(u_n)$  peut être rendu aussi grand qu'on veut si  $n$  est choisi suffisamment grand.  
Pour tout entier  $n \geq 1000$ , on a  $u_n > 10^6$  ; pour tout entier  $n \geq 10^6$ ,  $u_n \geq 10^{12}$ .

Plus généralement, pour tout réel  $M \geq 0$ , dès que  $n \geq \sqrt{M}$ , on a  $u_n \geq M$ .

On dit que  $(u_n)$  **diverge vers**  $+\infty$  ou qu'elle admet  $+\infty$  comme limite et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty .$$

- $(w_n)$  est négatif et peut être rendu aussi grand qu'on veut en valeur absolue si  $n$  est choisi suffisamment grand.

Pour tout entier  $n \geq 108$ , on a  $w_n \leq -10^6$  ; pour tout entier  $n \geq 707107$ ,  $w_n \leq -10^{12}$ .

Plus généralement, pour tout réel  $M \geq 0$ , dès que  $n \geq \sqrt{\frac{M}{2} + 1}$ , on a  $w_n \leq -M$ .

On dit que  $(w_n)$  diverge vers  $-\infty$  ou qu'elle admet  $-\infty$  comme limite et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty .$$

- $(t_n)$  ne se stabilise autour d'aucune valeur réelle : on dit que  $(t_n)$  diverge et n'admet pas de limite.

### Définition :

On dit qu'une suite numérique  $(u_n)$  est **divergente** si elle n'est pas convergente.

### Remarque :

Les suites étant définies sur des entiers positifs, on s'intéresse exclusivement à leur **comportement en**  $+\infty$ .

## II. Suites arithmétiques

### 1) Généralités

#### Définition :

Une suite numérique  $(u_n)$  est **arithmétique** s'il existe un nombre  $r$ , appelé **raison** de la suite, tel que pour tout nombre entier naturel  $n$ , on ait :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

**Exemple :**

La suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$  est une suite arithmétique de raison -5.

**Remarque :**

Une suite  $(u_n)$  est **arithmétique** si, et seulement si, la **variation absolue** entre deux termes consécutifs  $u_{n+1} - u_n$  est **constante**.

**Propriété :**

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = u_0 + n r$ .

**Démonstration :**

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique vérifiant donc la relation  $u_{n+1} = u_n + r$ .

Calculons quelques termes de cette suite :

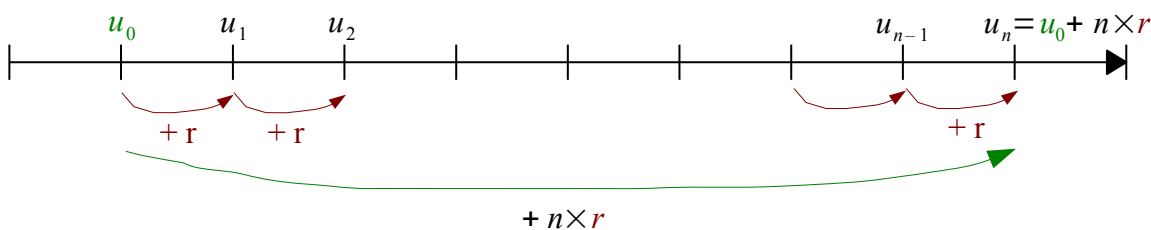
$$u_0 = u_0 ; u_1 = u_0 + r ; u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r ; \dots$$

En répétant  $n$  fois le procédé , on obtient :

$$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + n r$$

**Remarque :**

**Terme général** en fonction de  $n$  :  $u_n = u_0 + n \times r$  (*formule explicite*)



**Exemple :**

Soit la suite arithmétique  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ .

Son premier terme est  $u_0 = 3$  et sa raison est -5.

On a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = u_0 + n r = 3 + n \times (-5) = 3 - 5n$ .

Ce qui permet, par exemple, de calculer directement le **8<sup>e</sup>** terme :  $u_7 = 3 + 7 \times (-5) = -32$ .

### **Remarque :**

Pour une suite arithmétique  $(u_n)$  de raison  $r$  si  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels, on peut toujours déterminer l'un des termes  $u_n$  ou  $u_p$  en fonction de l'autre par la relation :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Cette relation est utile lorsqu'une suite arithmétique est définie à partir d'un certain rang ou lorsque l'on cherche sa raison connaissant deux termes.

### **Exemple :**

On s'intéresse à la suite  $(u_n)$  des nombres impairs et on définit  $u_n$  comme le  $n$ -ième nombre impair.

On a donc  $u_1 = 1$  et  $r = 2$ .

Le terme général de la suite est donnée par  $u_n = u_1 + (n - 1)r = 1 + (n - 1) \times 2 = 2n - 1$ .

On peut ainsi, par exemple, calculer le 100<sup>e</sup> nombre impair :  $u_{100} = 2 \times 100 - 1 = 199$ .

## **2) Variations**

### **Propriétés :**

$(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$ .

- Si  $r > 0$ , la suite  $(u_n)$  est **croissante** et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

$(u_n)$  **diverge** vers  $+\infty$ .

- Si  $r < 0$ , la suite  $(u_n)$  est **décroissante** et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

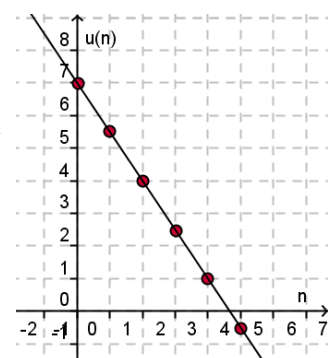
$(u_n)$  **diverge** vers  $-\infty$ .

- Si  $r = 0$ , la suite  $(u_n)$  est **constante** et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$ .

$(u_n)$  **converge** vers  $u_0$ .

### **Exemple :**

La suite arithmétique  $(u_n)$ , de premier terme  $u_0 = 7$  et de raison  $-1,5$ , a pour représentation graphique des points situés sur la droite d'équation :  $y = -1,5x + 7$ .



### 3) Somme

#### Propriété :

Soit  $(u_n)$  une **suite arithmétique**.

La formule suivante donne la **somme des termes consécutifs** :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \left( \frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

Somme des termes d'une suite arithmétique = nombre de termes  $\times$   $\frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$

#### Démonstration :

Soit  $(u_n)$  la suite arithmétique de raison  $r$ .

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ S = u_n + u_{n-1} + \dots + u_1 + u_0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} S = u_0 + (u_0 + r) + \dots + (u_n - r) + u_n \\ S = u_n + (u_n - r) + \dots + (u_0 + r) + u_0 \end{cases}$$

En additionnant membres à membres on obtient :

$$2S = u_0 + u_n + (u_0 + r) + (u_n - r) + \dots + (u_n - r) + (u_0 + r) + u_n + u_0$$

$$2S = (u_0 + u_n) + (u_0 + r + u_n - r) + \dots + (u_n - r + u_0 + r) + (u_n + u_0)$$

$$2S = (n+1)(u_0 + u_n)$$

donc  $S = (n+1) \left( \frac{u_0 + u_n}{2} \right)$ .

#### Notation :

On utilise la notation suivante :  $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \left( \frac{u_0 + u_n}{2} \right)$ .

#### Exemple :

La suite des nombres impairs est arithmétique et l'on a déterminé dans un exemple précédent que le 100e nombre impair valait 199.

On peut donc calculer la somme des 100 premiers nombres impairs :

$$S_{100} = 1 + 3 + 5 + \dots + 199 = 100 \times \frac{1 + 199}{2} = 100 \times 100 = 10000$$

### Propriété :

Pour tout entier naturel  $n$ , non nul :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

### Exemple :

La somme des 100 premiers entiers naturels non nuls est :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100(100+1)}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

## III. Suites géométriques

### 1) Généralités

#### Définition :

Une suite numérique  $(u_n)$  est **géométrique** s'il existe un nombre réel  $q$ , appelé **raison** de la suite, tel que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on ait :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

#### Exemples :

- La suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$  est une suite géométrique de raison 3.
- Une ville peuplée de 800 habitants voit sa population augmenter de 5% par an.  
Donc chaque année, sa population est multipliée par  $1 + 5\% = 1,05$ .  
Elle suit une progression géométrique de raison 1,05.

#### Remarque :

Une suite  $(u_n)$  est **géométrique** si, et seulement si, le **coefficient multiplicateur** entre deux termes consécutifs  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  (ou la variation relative  $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ ) est **constant**.

#### Propriété :

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = u_0 \times q^n$ .

Démonstration :

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique vérifiant donc la relation  $u_{n+1} = q \times u_n$ .

Calculons quelques termes de cette suite :

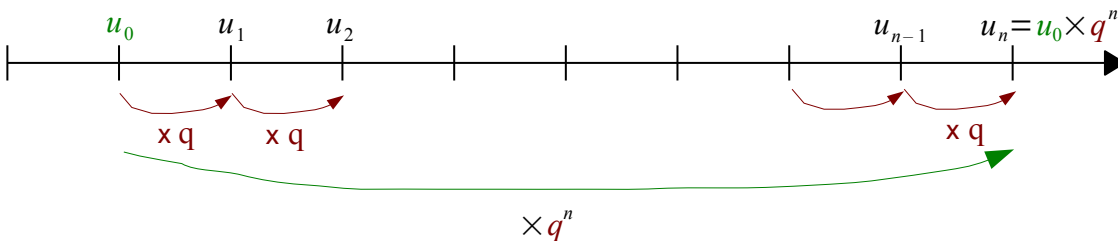
$$u_0 = u_0 ; u_1 = q \times u_0 ; u_2 = q \times u_1 = q \times (q \times u_0) = q^2 \times u_0 ; \dots$$

En répétant  $n$  fois le procédé, on obtient :

$$u_n = q \times u_{n-1} = q \times (q^{n-1} \times u_0) = q^n \times u_0 = u_0 \times q^n$$

**Remarque :**

**Terme général** en fonction de  $n$  :  $u_n = u_0 \times q^n$  (formule explicite)



**Exemples :**

- Soit la suite géométrique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0 = 1$  et de raison 3.  
On a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n$ .  
Ce qui permet, par exemple, de calculer directement le terme de rang 5 :  $u_4 = 3^4 = 81$ .
- Une ville peuplée de 800 habitants voit sa population augmenter de 5% par an. Comme vu précédemment, cette population suit une progression géométrique de raison 1,05.  
En notant  $u_0 = 800$  le terme initial de cette suite, on peut déterminer le terme général :

$$u_n = u_0 \times q^n = 800 \times 1,05^n$$

Après 6 années, la ville comptera  $u_6 = 800 \times 1,05^6 \approx 1072$  habitants.

**Remarque :**

Pour une suite géométrique  $(u_n)$  de raison  $q$  non nulle, si  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels, on peut toujours déterminer l'un des termes  $u_n$  ou  $u_p$  en fonction de l'autre par la relation  $u_n = u_p \times q^{n-p}$ .

Ceci est utile lorsqu'une suite géométrique est définie à partir d'un certain rang ou lorsque l'on recherche la raison d'une suite géométrique connaissant deux termes.

**Exemple :**

La suite  $(u_n)$  est géométrique telle que  $u_5 = 7$  et  $u_7 = 63$ .

Pour déterminer sa raison  $q$ , on utilise la relation :

$$u_7 = u_5 \times q^{7-5} = u_5 \times q^2$$

D'où  $q$  vérifie l'égalité  $63 = 7 \times q^2$ , soit  $q^2 = 9$ .

Il y a donc deux valeurs de  $q$  possibles : 3 et -3.

## 2) Variations

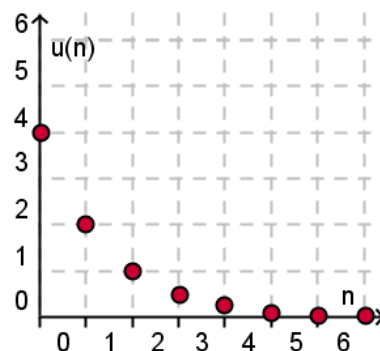
### Propriétés :

$(u_n)$  est une suite géométrique de premier terme non nul et de raison  $q$ .

- Si  $q > 1$ 
  - Si  $u_0 > 0$ , alors la suite  $u_n$  est **croissante** et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
  - $(u_n)$  **diverge** vers  $+\infty$ .
  - Si  $u_0 < 0$ , alors la suite  $u_n$  est **décroissante** et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .
  - $(u_n)$  **diverge** vers  $-\infty$ .
- Si  $0 < q < 1$ 
  - Si  $u_0 > 0$ , alors la suite  $u_n$  est **décroissante** et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
  - $(u_n)$  **converge** vers 0.
  - Si  $u_0 < 0$ , alors la suite  $u_n$  est **croissante** et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
  - $(u_n)$  **converge** vers 0.
- Si  $q = 1$ , alors la suite  $(u_n)$  est **constante**.  
Donc  $(u_n)$  **converge** vers  $u_0$ .
- Si  $q = 0$ , alors la suite  $(u_n)$  est **constante** et vaut 0 à partir du second terme.  
Donc  $(u_n)$  **converge** vers 0.
- Si  $q < 0$ , alors la suite  $(u_n)$  n'a pas de variations régulières.
  - Si  $-1 < q < 0$  alors  $(u_n)$  **converge** vers 0.
  - Si  $q \leq -1$  alors  $(u_n)$  **diverge** et n'admet pas de limite.

### Exemple :

La suite géométrique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0 = 4$  et de raison  $\frac{1}{2}$  admet la représentation graphique ci-contre.



### 3) Somme

#### Propriété :

Soit  $(u_n)$  une **suite géométrique** de raison  $q \neq 1$ .

La formule suivante donne la **somme des termes consécutifs** :

$$\text{Somme des termes d'une suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

En particulier, pour une suite géométrique de premier terme  $u_0$  :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

#### Démonstration :

Soit  $(u_n)$  la suite géométrique de raison  $q$ . Donc  $u_p = u_{p-1} \times q$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ qS = q(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ qS = qu_0 + qu_1 + \dots + qu_{n-1} + qu_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ qS = u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

En soustrayant terme à terme, on obtient :

$$S - qS = u_0 - 0 + u_1 - u_1 + \dots + u_n - u_n + 0 - u_{n+1}$$

$$\text{Donc } S - qS = u_0 - u_{n+1} = u_0 - u_0 \times q^{n+1}$$

$$\text{Ainsi } (1 - q)S = u_0(1 - q^{n+1}) \text{ et } S = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} .$$

#### Notation :

$$\text{On utilise la notation suivante : } \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} .$$

#### Exemple :

La suite  $(u_n)$  est géométrique de premier terme  $u_0 = 3$  et de raison 2.

On peut exprimer la somme des  $n + 1$  premiers termes :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 3 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 3 \times (2^{n+1} - 1)$$

Par exemple, pour  $n = 10$ ,  $S_{10} = 3 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 1024) = 3 \times (2^{11} - 1) = 3 \times 2047 = 6141$  .

**Propriété :**

Soit  $q$  un réel quelconque et  $n$  un entier naturel.

- Si  $q \neq 1$ , alors  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .
- Si  $q = 1$ , alors  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$ .

**Exemple :**

Soit  $(u_n)$ , la suite des puissances de 2 :  $u_n = 2^n$ .

La somme des 20 premières puissances de 2 est :

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{19} = \frac{1 - 2^{19+1}}{1 - 2} = 1\,048\,575.$$