Chapitre 3

Équations et inéquations du second degré

I. Équation du second degré

1) Discriminant

Propriété :

Pour tous réels a, b et c avec $a \neq 0$, on a :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \text{ avec } \Delta = b^2-4ac$$

Démonstration :

On a vu que :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c \quad \text{donc}$$

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Définition :

Soit f une fonction trinôme, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$).

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme.

Exemple :

$f(x) = 3x^2 + x - 2$.

f a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 1 + 24 = 25$.

Définition :

L'expression $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est appelée **forme canonique** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

2) *Équation du second degré*

Définition :

Une **équation du second degré à une inconnue** x est une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b et c sont des réels donnés et $a \neq 0$.

Exemples :

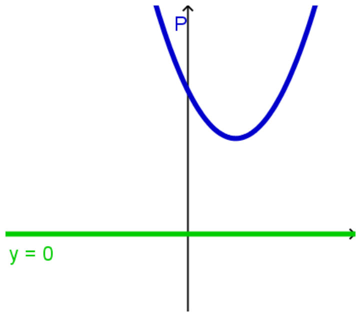
- $3x^2 - 7x + 2 = 0$
- $2x^2 - 9 = 0$
- $-x^2 + 2x = 0$
- L'équation (E) $x^2 - 4 + 3x = 2x^2 - x$ peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$

  En effet, (E) équivaut à $x^2 - 4 + 3x - 2x^2 + x = 0$ soit $-x^2 + 4x - 4 = 0$

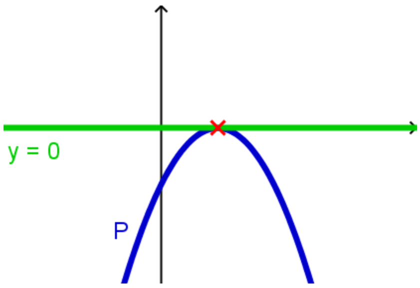
  Donc, ici $a = -1$; $b = 4$ et $c = -4$.

Interprétation graphique :

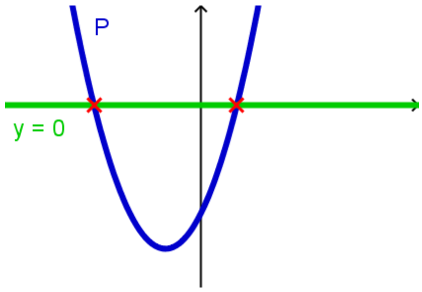
Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ correspondent aux abscisses des points d'intersections entre la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ et l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.



L'équation n'a pas de solution.



L'équation admet une solution.



L'équation admet deux solutions.

3) *Résolution*

Propriété :

Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Lorsque $\Delta < 0$, l'équation n'a **pas de solution**.
- Lorsque $\Delta = 0$, l'équation admet **une solution** $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Lorsque $\Delta > 0$, l'équation admet **deux solutions distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration :

On sait que $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$ donc à $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ ($a \neq 0$), c'est-à-dire $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$.

En posant $X=x+\frac{b}{2a}$, résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ revient donc à résoudre $X^2=\frac{\Delta}{4a^2}$.

- Si $\Delta < 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2}<0$. L'équation n'a pas de solution (car X^2 est positif).
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation s'écrit $X^2 = 0$. Cette équation a une seule solution $X = 0$, c'est-à-dire $x+\frac{b}{2a}=0$ donc $x=-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions :

$$X_1=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{et} \quad X_2=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

Soit

$$x_1+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{et} \quad x_2+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

  - Si $a > 0$, $\sqrt{4a^2}=2a$ donc :

$$x_1=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  - Si $a < 0$, $\sqrt{4a^2}=-2a$ donc :

$$x_1=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{-2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{-2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemples :

- Résolution de l'équation $2x^2 - 3x + 5 = 0$

  $a = 2$; $b = -3$ et $c = 5$ ainsi $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31$ donc $\Delta < 0$.

  L'équation n'admet aucune solution.
- Résolution de l'équation $3x^2 - x - 4 = 0$

  $a = 3$; $b = -1$ et $c = -4$ ainsi $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times -4 = 1 + 48 = 49$ donc $\Delta > 0$.

  L'équation admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+7}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-7}{6}=\frac{-6}{6}=-1$$

  L'ensemble des solutions S = $\left\{-1;\frac{4}{3}\right\}$.

Propriété :

Soient x_1 et x_2 les racines d'un trinôme $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$).

On a $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

Exemple :

Le polynôme du second degré $P(x) = -x^2 + 2x + 3$ a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 16$.

$P(x)$ admet donc deux racines réelles x_1 et x_2.

$x_1 + x_2 = \frac{-2}{-1} = 2$ et $x_1 \times x_2 = \frac{3}{-1} = -3$.

Propriété :

Deux réels ont pour somme S et pour produit P si, et seulement si, ils sont solutions de l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Démonstration :

- Si deux réels x_1 et x_2 vérifient $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 \times x_2 = P$, alors $x_2 = S - x_1$ et $P = x_1 \times (S - x_1)$ et donc $x_1^2 - Sx_1 + P = 0$. Dans ce cas x_1 est bien solution de $x^2 - Sx + P = 0$.

  La démonstration est la même pour x_2.

- Réciproquement, si x_1 et x_2 sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$, alors, d'après la propriété précédente, $x_1 + x_2 = \frac{S}{1}$, soit $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 \times x_2 = \frac{P}{1}$, ainsi $x_1 \times x_2 = P$.

Exemple :

L'équation $2x^2 - x - 1 = 0$ admet $x_1 = 1$ comme solution évidente.

L'autre solution x_2 vérifie donc $1 \times x_2 = \frac{-1}{2}$. D'où $x_2 = -\frac{1}{2}$.

II. Inéquation du second degré

1) Factorisation du trinôme

Propriété :

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Lorsque $\Delta > 0$, en notant x_1 et x_2 les deux racines, on a :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Lorsque $\Delta = 0$, en notant x_0 l'unique racine, on a :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

- Lorsque $\Delta < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas.

Exemple :

On a vu que l'équation $3x^2 - x - 4 = 0$ avait deux solutions : -1 et $\frac{4}{3}$.

On a donc $3x^2 - x - 4 = 3(x+1)\left(x - \frac{4}{3}\right)$.

Remarques :

- Lorsque l'**équation** $ax^2 + bx + c = 0$ admet des **solutions**, ces solutions sont les **racines** du **trinôme** $ax^2 + bx + c$.

  Ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
- Lorsque le polynôme a deux racines distinctes α_1 et α_2, l'abscisse α du sommet de la parabole est la moyenne des deux racines : $\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$.

2) Signe du trinôme

Propriété :

Soit f, une fonction polynôme de degré 2, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, alors, x_1 et x_2 étant les racines du trinôme telles que $x_1 < x_2$, $f(x)$ est du signe de a si et seulement si $x \in\ ]-\infty\ ; x_1[\ \cup\ ]x_2\ ; +\infty[$.
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x)$ est du signe de a si et seulement si $x \neq -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors, pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.

Démonstration :

- Si $\Delta > 0$, alors, pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme (avec $x_1 < x_2$).

  On a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

  Ainsi, $f(x)$ est du signe de a si et seulement si $x \in\ ]-\infty\ ;\ x_1[\ \cup\ ]x_2\ ;\ +\infty[$.

- Si $\Delta = 0$, alors, pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_0)^2$, avec $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

  Le carré $(x - x_0)^2$ est strictement positif pour $x \neq x_0$ et il s'annule en x_0.

  Ainsi $f(x)$ est du signe de a si et seulement si $x \neq -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$. On en déduit que, pour tout réel x, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$.

  Or $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, donc le signe de $f(x)$ est celui de a.

<u>Exemple :</u>

Le polynôme $(1 - x)(3x - 2)$ a pour racines 1 et $\frac{2}{3}$. Le coefficient a est le coefficient de x^2 .

On a $a = -3 < 0$.

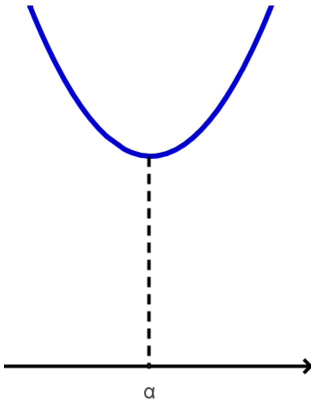
Le trinôme est du signe de $-a$ donc positif sur l'intervalle $\left[\frac{2}{3} ; 1\right]$ et du signe de a donc négatif sur $\left]-\infty ; \frac{2}{3}\right] \cup [1 ; +\infty[$.

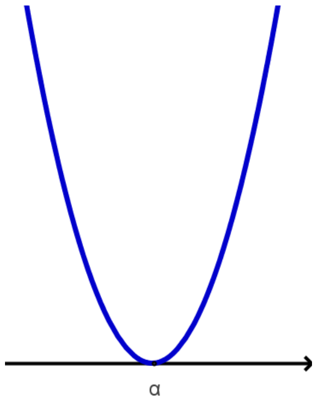
III. Synthèse

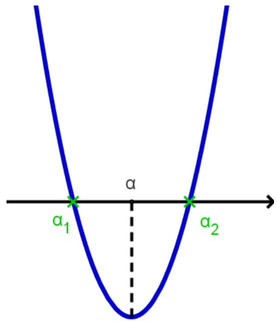
Soit le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$

<table>
<tr><th>$\Delta = b^2 - 4ac$</th><th>$\Delta < 0$</th><th>$\Delta = 0$</th><th>$\Delta < 0$</th></tr>
<tr><td>Solutions de l'équation $P(x) = 0$</td><td>Pas de solution</td><td>Une seule solution :
$\alpha = -\frac{b}{2a}$</td><td>Deux solutions :
$\alpha_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\alpha_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Factorisation de $P(x)$</td><td>Pas de factorisation</td><td>$P(x) = a(x - \alpha)^2$</td><td>$P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$</td></tr>
<tr><td>$a > 0$

Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses

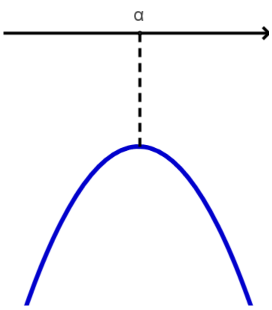
Signe de $P(x)$</td>
<td>

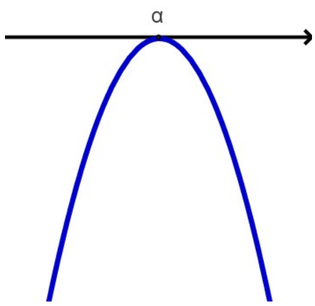
<table><tr><td>x</td><td>-∞ +∞</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>+</td></tr></table></td>
<td>

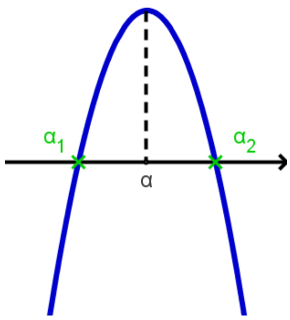
<table><tr><td>x</td><td>-∞ α +∞</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>+ 0 +</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>-∞ α_1 α_2 +∞</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>+ 0 – 0 +</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$a < 0$

Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses

Signe de $P(x)$</td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>-∞ +∞</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>–</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>-∞ α +∞</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>– 0 –</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>-∞ α_1 α_2 +∞</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>– 0 + 0 –</td></tr></table></td></tr>
</table>