Chapitre 12

Fonctions trigonométriques

I. Définitions sinus et cosinus

1) Fonction périodique

Définition :

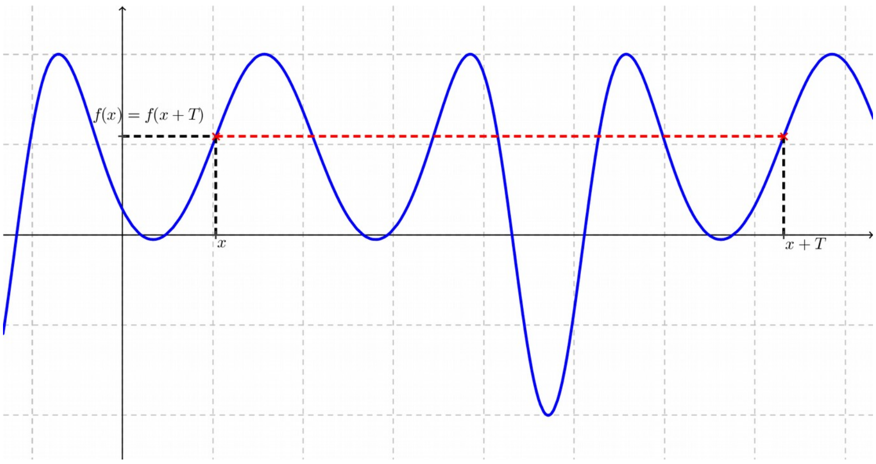
Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathscr{D}$.

La fonction f est périodique de période T s'il existe un nombre réel strictement positif T tel que, pour tout nombre réel x de $\mathscr{D}$, le nombre $x+\mathrm{T}$ appartient à $\mathscr{D}$ et :

$$f(x+\mathrm{T})=f(x)$$

Interprétation graphique :

Dans un repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative d'une fonction périodique de période T est invariante par translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{i}$.



Remarque :

Si T est une période de f et n un entier naturel $n\mathrm{T}$ est également une période de f.

2) Fonctions sinus et cosinus

Définitions :

- La fonction $x\mapsto \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction sinus** et notée sin.
- La fonction $x\mapsto \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction cosinus** et notée cos.

Remarques :

Pour tout réel x :

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

3) Dérivabilité de la fonction sinus

Propriété :

La fonction sinus est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

Propriété :

Soit a et b deux réels.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax + b)$ est **dérivable** sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = a\cos(ax + b)$.

4) Dérivabilité de la fonction cosinus

Propriété :

La fonction cosinus est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$$\cos'(x) = -\sin x$$

Démonstration :

On sait que, pour tout nombre réel x, $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f : x \longmapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

pour tout nombre réel x, $f'(x) = 1 \times \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ donc $\cos'(x) = -\sin x$.

Propriété :

Soit a et b deux réels.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(ax + b)$ est **dérivable** sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = -a\sin(ax + b)$.

II. Étude de la fonction sinus

1) Étude sur l'intervalle [0 ; π]

Pour tout nombre réel x , $\sin'(x)=\cos x$.

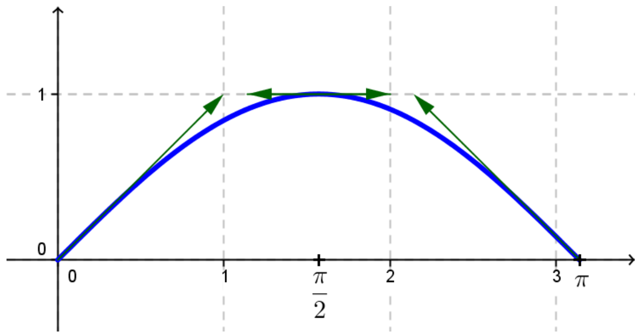
Or $\cos(x)\geqslant 0$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos x\leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Donc, la fonction sinus est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

Tableau de variation sur $[0;\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$	1	+	0	–	-1
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0

Courbe sur $[0;\pi]$



2) Courbe représentative sur [-π ; π]

Propriété :

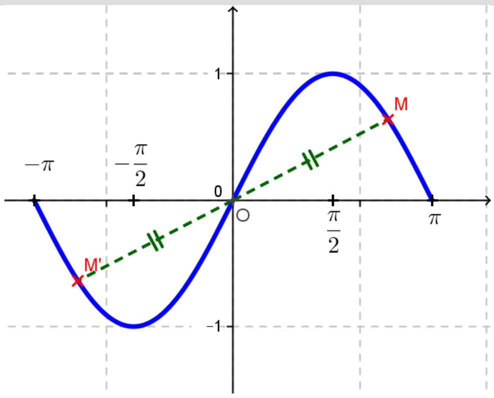
La fonction sinus est **impaire**.

Démonstration :

On sait que pour tout nombre réel x , $\sin(-x)=-\sin(x)$.

Propriété :

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus est **symétrique par rapport à l'origine** O du repère.



Remarque :

D'après la parité de la fonction sinus, il suffit d'étudier la fonction sur [0 ; π], puis de compléter la courbe par symétrie par rapport à l'origine du repère.

3) Courbe représentative de la fonction sinus

Propriété :

La fonction sinus est **périodique de période 2π.**

Démonstration :

On sait que, pour tout nombre réel x, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$.

Remarque :

On en déduit alors que $\sin(x+k2\pi)=\sin x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété :

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus est **invariante par toute translation de vecteur** $k2\pi\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

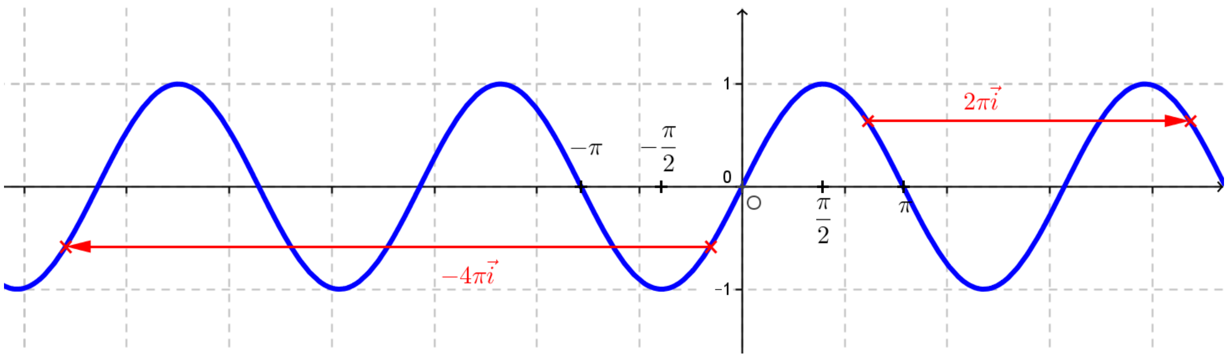
Démonstration :

Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout k de $\mathbb{Z}$, on note $M(x;\sin x)$ et $M'(x+2k\pi, \sin(x+2k\pi))$ deux points de $\mathscr{C}$.

Alors $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} k\times 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MM'}=k2\pi\vec{i}$ et M' est l'image de M par la translation de vecteur $k2\pi\vec{i}$.

Remarque :

D'après la périodicité de la fonction sinus, il suffit d'étudier la fonction sur n'importe quel intervalle de longueur 2π, puis de reproduire la courbe correspondante par des translations de vecteurs parallèles à l'axe des abscisses, de norme 2π.



Remarque :

La courbe de la fonction sinus est appelée **une sinusoïde**.

III. Étude de la fonction cosinus

1) Étude sur l'intervalle [0 ; π]

Pour tout nombre réel x , $\cos'(x) = -\sin x$.

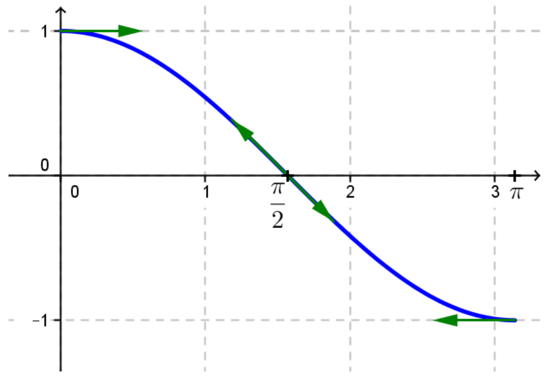
Or $\sin(x) \geqslant 0$ sur $[0;\pi]$ donc $\cos'(x) \leqslant 0$ sur $[0;\pi]$.

Donc, la fonction cosinus est décroissante sur $[0;\pi]$.

Tableau de variation sur $[0;\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos'(x)$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos(x)$	1	↘	0	↘	-1

Courbe sur $[0;\pi]$



2) Courbe représentative sur [-π ; π]

Propriété :

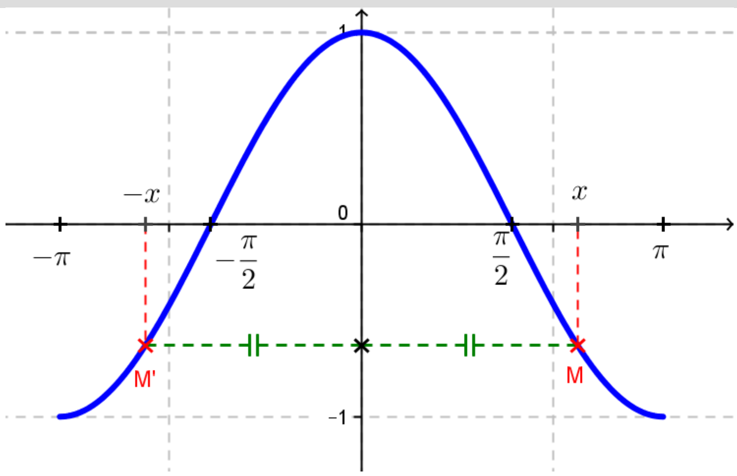
La fonction cosinus est **paire**.

Démonstration :

On sait que pour tout nombre réel x , $\cos(-x) = \cos(x)$.

Propriété :

La courbe représentative Γ de la fonction cosinus est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** du repère.



Remarque :

D'après la parité de la fonction cosinus, il suffit d'étudier la fonction sur [0 ; π], puis de compléter la courbe par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

3) Courbe représentative de la fonction cosinus

Propriété :

La fonction cosinus est **périodique de période 2π.**

Démonstration :

On sait que, pour tout nombre réel x, $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$.

Remarque :

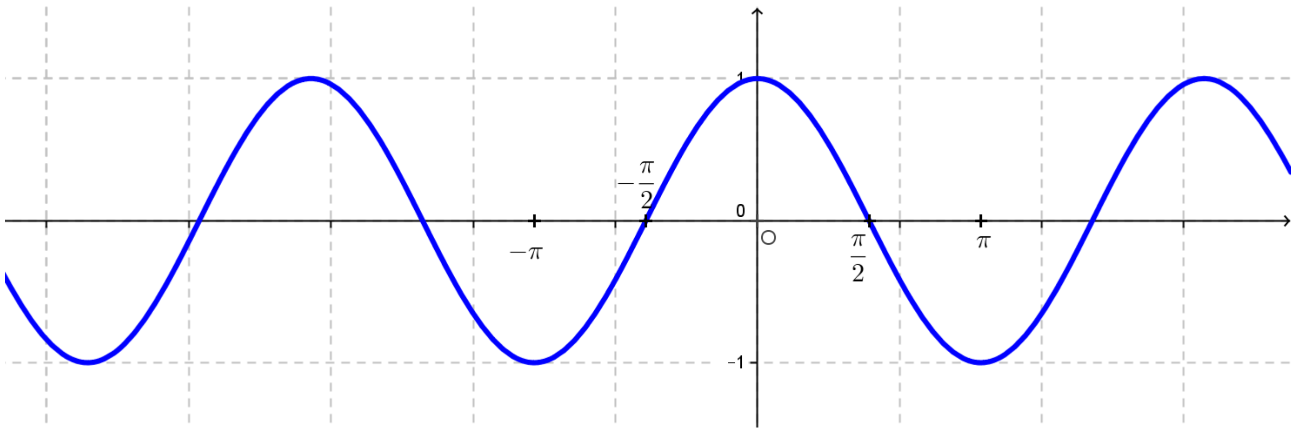
On en déduit alors que $\cos(x+k2\pi)=\cos x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété :

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction cosinus est **invariante par toute translation de vecteur** $k2\pi\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque :

D'après la périodicité de la fonction sinus, il suffit d'étudier la fonction sur n'importe quel intervalle de longueur 2π, puis de reproduire la courbe correspondante par des translations de vecteurs parallèles à l'axe des abscisses, de norme 2π.



Remarques :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$ donc la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction sinus est l'image de la courbe représentative Γ de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.
- La courbe de la fonction cosinus est aussi appelée **une sinusoïde**.