

Chapitre 1

Fonctions de référence

I. Fonction valeur absolue

1) Valeur absolue

Définition :

La **valeur absolue** d'un réel x est le nombre, noté $|x|$, qui est égal au nombre x si x est positif, et au nombre $-x$ si x est négatif.

$$\text{Donc, } |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples :

- $|5| = 5$ car $5 > 0$
- $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ car $3 - \pi < 0$
- $|2 - t| = \begin{cases} 2 - t & \text{si } 2 - t \geq 0 \text{ soit } t \leq 2 \\ t - 2 & \text{si } 2 - t < 0 \text{ soit } t > 2 \end{cases}$

Remarques :

- Une valeur absolue est toujours positive : pour tout réel x , $|x| \geq 0$.
- Deux nombres opposés ont la même valeur absolue : pour tout réel x , $|x| = |-x|$.
- Pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$ et pour tout réel $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = |x|$.

Propriétés :

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
- Pour tous réels x et y , on a :
 - $|xy| = |x| \times |y|$
 - si $y \neq 0$, $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
 - $|x + y| \leq |x| + |y|$ (**inégalité triangulaire**)

2) Fonction valeur absolue

Définition :

La **fonction valeur absolue** est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$.

$$\text{On a donc, } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque :

La fonction valeur absolue est une fonction **affine par morceaux**.

Propriété :

La fonction valeur absolue est **paire**.

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction valeur absolue est donc **symétrique** par rapport à l'**axe des ordonnées**.

Démonstration :

Soit f la fonction valeur absolue.

Pour tout réel x , on a $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

Les deux points de coordonnées $(x; f(x))$ et $(-x; f(-x))$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriétés :

La fonction valeur absolue est **strictement décroissante** sur $]-\infty; 0]$.

La fonction valeur absolue est **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$.

Son **minimum** sur \mathbb{R} est 0 et il est atteint pour $x = 0$.

Démonstration :

Pour tout réel x positif, $f(x) = x$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Pour tout réel x négatif, $f(x) = -x$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

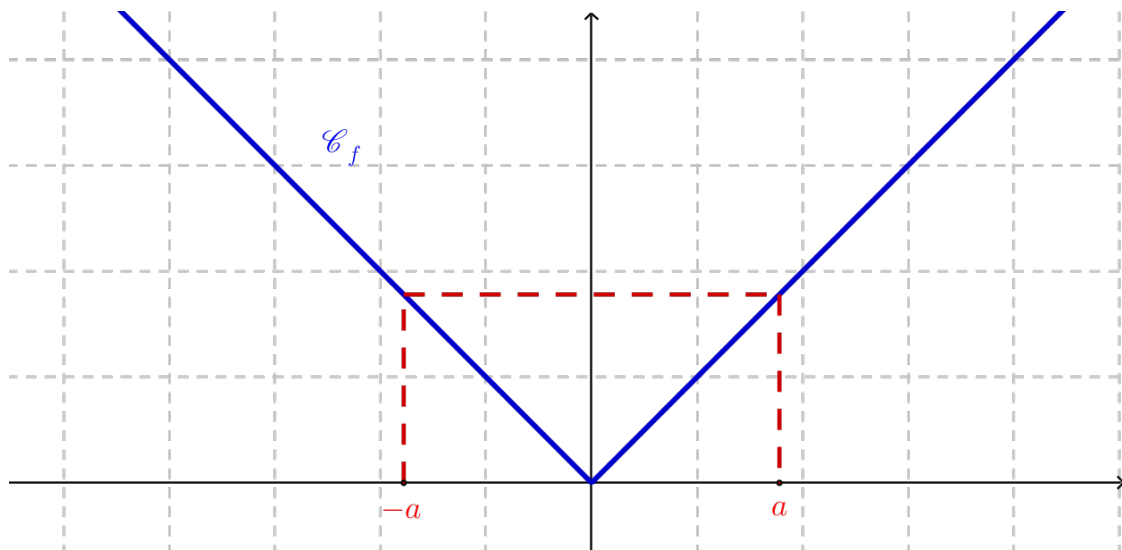
Pour tout réel x , on a $f(x) = |x|$ et $|x| \geq 0$. De plus $f(0) = 0$.

Ainsi, pour tout réel x , $f(x) \geq f(0)$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ x $	$+\infty$	0	$+\infty$

Courbe représentative :



II. Polynôme du second degré

1) Forme d'une fonction trinôme

Forme réduite

Définition :

Une fonction **polynôme du second degré** (ou **trinôme**) est une fonction définie sur \mathbb{R} dont l'expression peut être mise sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels ($a \neq 0$).

Les réels a, b et c sont les **coefficients** de la fonction polynôme.

Exemple :

$P(x) = 2x^2 - 8x + 8$ est une fonction trinôme donnée sous sa **forme réduite** avec :

$$a = 2, b = -8 \text{ et } c = 8.$$

Forme canonique

Propriété :

Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ où a , α et β sont des réels avec $a \neq 0$.

Cette forme s'appelle la **forme canonique** du trinôme.

Démonstration :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \text{ avec } (a \neq 0).$$

$$\text{Or } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2. \text{ On en déduit : } x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

$$\text{On a donc : } ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Propriété :

Pour tous réels a , b et c avec $a \neq 0$, on a donc :

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Remarque :

On vérifie que $\beta = P(\alpha)$.

$$\text{En effet, } P(\alpha) = P\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \beta$$

Exemples :

- $P(x) = 2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x - 2)^2$

On obtient donc la forme canonique de $P(x)$ avec $a = 2$, $\alpha = 2$ et $\beta = 0$.

- On considère le polynôme $Q(x) = -2x(x - 2) + 3$

On a $Q(x) = -2x^2 + 4x + 3$. (forme réduite avec $a = -2$, $b = 4$ et $c = 3$)

En calculant $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-2)} = 1$ et $\beta = \frac{-4^2 + 4 \times (-2) \times 3}{4 \times (-2)} = \frac{-16 - 24}{-8} = 5$.

Donc $Q(x) = -2(x - 1)^2 + 5$ (forme canonique avec $a = -2$, $\alpha = 1$ et $\beta = 5$)

Forme factorisée

Propriété :

Il est parfois possible de factoriser $P(x)$. On obtient alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
 $a(x - x_1)(x - x_2)$ est la **forme factorisée** de $P(x)$.

Exemples :

- $P(x) = 3(x - 2)^2$ (forme factorisée avec $a = 3, x_1 = 2$ et $x_2 = 2$)
- $R(x) = x^2 - 2x - 15$ (forme réduite avec $a = 1, b = -2$ et $c = -15$)
 $R(x) = (x - 1)^2 - 16$ (forme canonique avec $a = 1, \alpha = 1$ et $\beta = -16$)
 $R(x) = (x - 5)(x + 3)$ (forme factorisée avec $a = 1, x_1 = 5$ et $x_2 = -3$)
- $T(x) = 2(x - 1)^2 + 5$ *On ne peut pas donner la forme factorisée.*

2) Sens de variation

Propriété :

Suivant le **signe de a** , on obtient le sens de variation de la fonction polynôme du second degré :

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0 ; \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

- $a > 0$ (positif)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$

Le **minimum** β de f est atteint pour $x = \alpha$.

- $a < 0$ (négatif)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	β	$-\infty$

Le **maximum** β de f est atteint pour $x = \alpha$.

Démonstration : Pour le cas où $a > 0$

En mettant f sous sa forme canonique on obtient $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

- Pour tout x , on a $f(x) \geq \beta$ (donc β est un minimum de f sur $]-\infty ; +\infty[$)
- Pour x_1 et x_2 appartenant à $]-\infty ; \alpha[$ (donc $x_1 < \alpha$ et $x_2 < \alpha$), on a :

Si $x_1 < x_2$, (donc $x_1 - x_2 < 0$) alors

$$f(x_1) - f(x_2) = [a(x_1 - \alpha)^2 + \beta] - [a(x_2 - \alpha)^2 + \beta]$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - \alpha)^2 - a(x_2 - \alpha)^2 = a[(x_1 - \alpha)^2 - (x_2 - \alpha)^2]$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a[(x_1 - \alpha) - (x_2 - \alpha)][(x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha)]$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a[x_1 - x_2][x_1 + x_2 - 2\alpha] \quad \text{avec } x_1 - x_2 < 0 \text{ et } x_1 + x_2 < 2\alpha \text{ donc}$$

$$f(x_1) - f(x_2) > 0 \text{ et } f(x_1) > f(x_2)$$

Ainsi f est décroissante sur $]-\infty ; \alpha[$

On démontre les autres cas de la même manière.

3) Représentation graphique

Définition :

La courbe représentative d'une fonction polynôme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, est une **parabole**.

Propriétés :

- Son **sommet** $S(\alpha ; \beta)$ a pour abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et pour ordonnée $\beta = P(\alpha)$.
- La droite d'équation $x = \alpha$ est axe de symétrie de la parabole.

Démonstration :

$$P(\alpha + t) = a(\alpha + t)^2 + b(\alpha + t) + c = a\alpha^2 + b\alpha + c + 2a\alpha t + at^2 + bt = P(\alpha) + at^2 + t(2a\alpha + b)$$

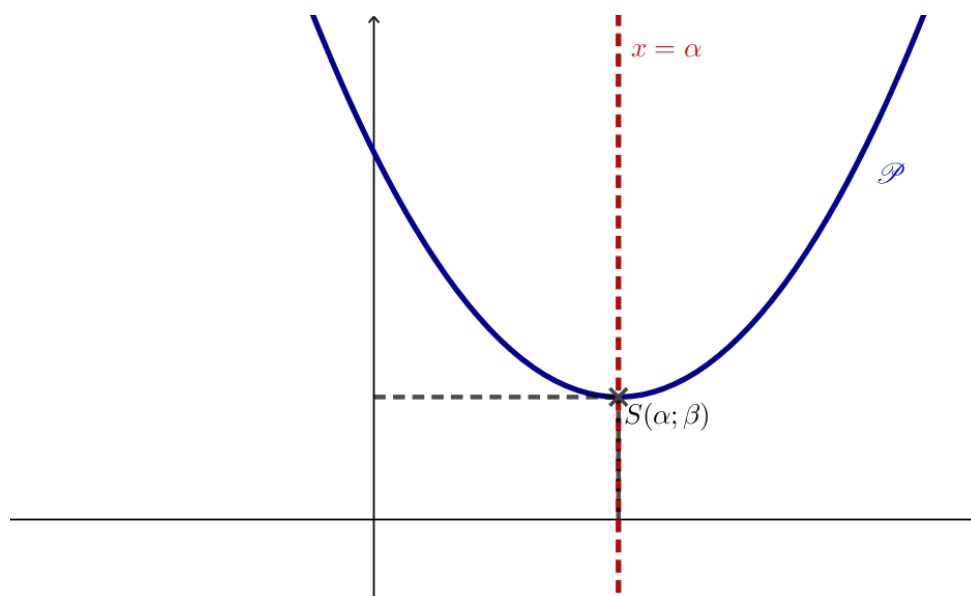
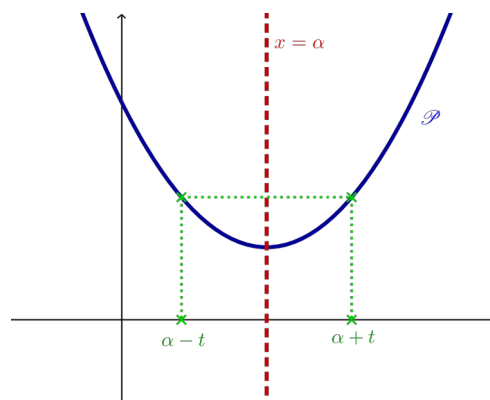
Or $\alpha = -\frac{b}{2a}$ donc $2a\alpha + b = 0$. Ainsi $P(\alpha + t) = P(\alpha) + at^2$

De la même manière on a :

$$P(\alpha - t) = P(\alpha) + at^2 - t(2a\alpha + b) = P(\alpha) + at^2$$

Donc, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(\alpha + t) = P(\alpha - t)$.

Ainsi $x = \alpha$ est axe de symétrie de la parabole.



Remarque :

Le signe de a permet de connaître l'allure de la parabole :

Si $a > 0$, alors la parabole est tournée vers le haut.



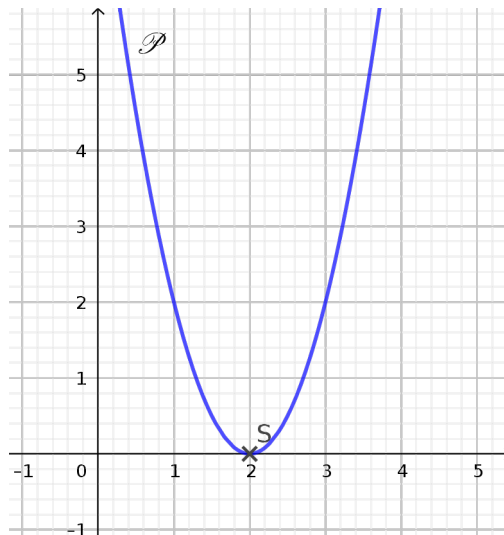
Si $a < 0$, alors la parabole est tournée vers le bas.



Exemples :

- La courbe représentative de la fonction P définie sur \mathbb{R} par $P(x) = 2x^2 - 8x + 8$ est une parabole \mathcal{P} de sommet $S(2 ; 0)$.

Comme $a = 2$ (positif), la parabole \mathcal{P} est tournée vers le haut.



- La courbe représentative de la fonction Q définie sur \mathbb{R} par $Q(x) = -0,5x^2 + 4x - 2$ est une parabole \mathcal{Q} de sommet $S'(4 ; 6)$.

Comme $a = -0,5$ (négatif), la parabole est tournée vers le bas.

