Chapitre 10

Fonction exponentielle

I. La fonction exponentielle

1) Existence et unicité

Propriété :

Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f'=f \text{ et } f(0)=1$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et notée **exp**.

Ainsi pour tout réel x :

$$\exp'(x)=\exp(x) \text{ et } \exp(0)=1$$

Propriété :

Si une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $f'=f$ et $f(0)=1$, alors, pour tout réel x, on a :

$$f(x)f(-x)=1 \text{ et donc } f(x)\neq 0 .$$

Par conséquent :

$$\text{pour tout réel } x,\ \exp(x)\neq 0 .$$

Démonstration :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f'=f$ et $f(0)=1$.

On pose pour tout réel x, $\phi(x)=f(x)f(-x)$; ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables et, pour tout réel x :

$$\phi'(x)=f'(x)f(-x)+f(x)\times(-f'(-x))=f(x)f(-x)-f(x)f(-x)=0 .$$

La fonction ϕ est donc constante sur $\mathbb{R}$ et, comme $\phi(0)=1$, on obtient pour tout réel x, $f(x)f(-x)=1$ et donc $f(x)\neq 0$.

Remarque :

On utilise ici une propriété fondamentale : si une fonction admet une dérivée nulle sur un intervalle, alors cette fonction est constante sur cet intervalle.

Démonstration de l'unicité de la fonction :

On suppose l'existence d'une fonction dérivable g vérifiant $g'=g$ et $g(0)=1$.

La fonction exp ne s'annulant pas, on peut définir $h=\frac{g}{\exp}$ sur ℝ.

$$h'(x)=\frac{g'(x)\exp(x)-g(x)\exp'(x)}{(\exp(x))^2}=\frac{g(x)\exp(x)-g(x)\exp(x)}{(\exp(x))^2}=0 .$$

h est donc constante sur ℝ et $h(0)=\frac{g(0)}{\exp(0)}=1$. Ainsi, pour tout réel x, on a $h(x)=1$.

On en déduit que, pour tout réel x : $g(x)=\exp(x)$.

2) Propriétés algébriques

Propriété :

Pour tout réel x, pour tout réel y :

$$\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$$

Démonstration :

Comme $\exp(x)\neq 0$ pour tout réel x, on peut considérer la fonction f définie sur ℝ par :

$$f(x)=\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} .$$

où y est un nombre réel quelconque fixé.

La fonction f est dérivable sur ℝ et on a, pour tout x réel :

$$f'(x)=\frac{\exp(x+y)\exp(x)-\exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2}=0 .$$

Donc f est une fonction constante.

Comme $\exp(0)=1$, on a $f(0)=f(x)=\exp(y)$, c'est-à-dire :

$$\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}=\exp(y) .$$

Remarque :

On dit que exp transforme les sommes en produit.

Propriétés :

Pour tout réel x, pour tout réel y et pour tout entier relatif n :

- $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(nx)=(\exp(x))^n$

Démonstrations :

- D'après la propriété précédente :
  $\exp(x)\exp(-x)=\exp(x-x)=\exp(0)=1$.
- Pour tout réel x, comme $\exp(x)\neq 0$, $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$.

  $\exp(x-y)=\exp(x+(-y))=\exp(x)\exp(-y)=\exp(x)\dfrac{1}{\exp(y)}=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Exemples :

- $\exp(3) \times \exp(7) = \exp(3 + 7) = \exp(10)$.
- $\exp(-5)=\dfrac{1}{\exp(5)}$.
- $(\exp(2))^4 = \exp(4 \times 2) = \exp(8)$.

3) Le nombre e

Définition :

On note e l'image de 1 par la fonction exponentielle. Ainsi $\exp(1)=\mathrm{e}$.

Remarque :

Le nombre exp(1) noté e est un nombre irrationnel et admet 2,71828 pour valeur approchée à 10^{-5} .

Propriété :

Pour tout entier n, on a $\exp(n)=\exp(1\times n)=(\exp(1))^n=\mathrm{e}^n$.

Par **convention**, on décide de noter pour tout réel x : $\exp(x)=\mathrm{e}^x$.

Exemples :

- $\exp(3) \times \exp(7) = \exp(3 + 7) = \exp(10)$ peut donc s'écrire $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^7 = \mathrm{e}^{3+7} = \mathrm{e}^{10}$.
- $(\mathrm{e}^{3,4})^2$ peut donc s'écrire $\mathrm{e}^{2 \times 3,4} = \mathrm{e}^{6,8}$.

Remarques :

Avec cette nouvelle notation on a donc :

- $\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{y}$
- $\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$
- $\mathrm{e}^{x-y}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}}$
- $\mathrm{e}^{nx}=\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{n}$

Propriété :

Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique.

Démonstration :

Soit a un réel. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{na}$.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)a} = \mathrm{e}^{na+a} = \mathrm{e}^{na}\times\mathrm{e}^{a} = u_n\times\mathrm{e}^{a}$.

On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^{a} et de premier terme $u_0 = \mathrm{e}^{0} = 1$.

II. Étude de la fonction exponentielle

1) Signe et variations

Propriété :

La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$.

On peut écrire :

pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x}>0$.

Démonstration :

On sait que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x}=\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^{2}>0$, donc pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^{x}>0$.

Propriété :

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

On sait que $\exp'=\exp$ et, d'après le théorème précédent, la fonction $\exp$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

La fonction exponentielle est de croissance très rapide.

D'où l'expression de « croissance exponentielle ».

Propriété :

Pour tout x et y :

- $x<y \Leftrightarrow e^x<e^y$
- $x=y \Leftrightarrow e^x=e^y$

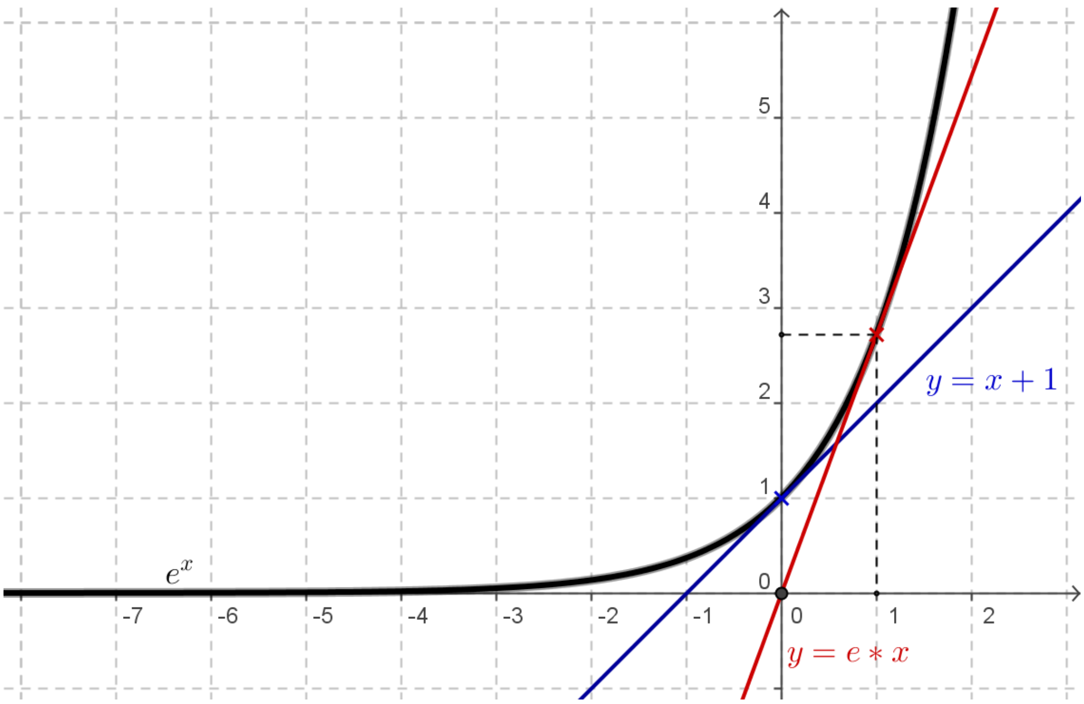
Exemples :

- Résoudre $e^{-2x}=e^2$ dans $\mathbb{R}$: $e^{-2x}=e^2 \Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1 \Leftrightarrow$ S = {-1}
- Résoudre $e^{-2x}<1$ dans $\mathbb{R}$: $e^{-2x}<1 \Leftrightarrow e^{-2x}<e^0 \Leftrightarrow -2x<0 \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow S=]0;+\infty[$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	1	↗	e	↗	$+\infty$

2) Représentation graphique



3) Fonction $x \mapsto \exp(ax + b)$

Propriété :

Soit a et b deux réels.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = a\, e^{ax+b}$.

Démonstration :

On utilise la formule du cours sur la dérivation.

Exemple :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+1}$.

Pour tout réel x, on a $f'(x) = 2e^{2x+1}$.

Comme $e^{2x+1} > 0$, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

Les fonctions e^{ax+b} et $ax + b$ ont le même sens de variation : leurs fonctions dérivées sont de même signe.