Chapitre 11

Configurations géométriques

I. Équation d'un cercle

1) À partir du centre et du rayon

Définition :

O est un point et r un nombre réel strictement positif.

L'ensemble des points M du plan vérifiant OM = r est le **cercle** de **centre** O et de **rayon** r.

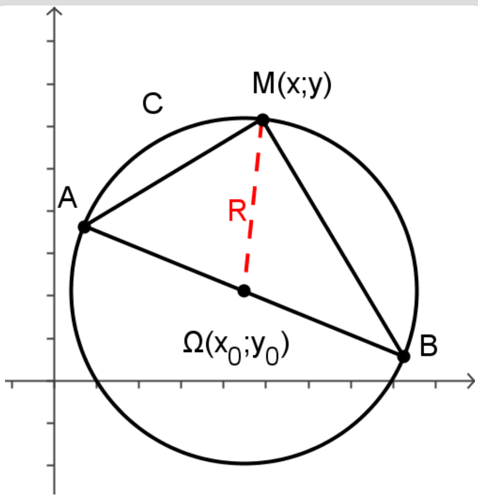
Propriété :

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon R.

Un point $M(x ; y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ si, et seulement si :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 .$$

Cette équation est une **équation cartésienne** du cercle $\mathscr{C}$.



Démonstration :

M $\in \mathscr{C} \Leftrightarrow \quad \Omega M=R \quad \Leftrightarrow \quad \Omega M^2=R^2$.

Or dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a $\Omega M^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$.

Exemples :

- Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(-2;3)$ passant par le point $A(2;1)$ est :

$$(x+2)^2+(y-3)^2=20$$

car $\Omega A^2=(2-(-2))^2+(1-3)^2=4^2+(-2)^2=16+4=20$.

- Soit l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant $x^2+y^2+6x-2y+8=0$.

  $x^2+y^2+6x-2y+8=0 \Leftrightarrow [x^2+6x]+[y^2+2y]+8=0$

  $\Leftrightarrow [(x+3)^2-9]+[(y-1)^2-1]+8=0 \quad \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=2$

  On reconnaît l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(-3;1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

2) À partir du diamètre

Propriété :

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$.

Un point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

Démonstration :

- Si M est distinct de A et B :

  $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \quad \Leftrightarrow$ les droites (MA) et (MB) sont orthogonales

  $\Leftrightarrow$ le triangle AMB est rectangle en M

  $\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

- Si $M=A$ ou $M=B$, alors le point M appartient évidemment au cercle de diamètre $[AB]$, et le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est nul (car $\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB}=\vec{0}$).

Exemple :

Soit A(1 ; 3) et B(-3; 1).

Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] est l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}1-x\\3-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-3-x\\1-y\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(1-x)(-3-x)+(3-y)(1-y)$.

On obtient alors $x^2+2x-3+y^2-4y+3=0$, et ainsi $(x+1)^2-4+(y-2)^2-1=0$.

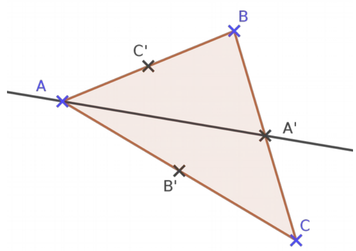
$\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre Ω(-1 ; 2) et de rayon $\sqrt{5}$.

II. Applications au triangle

1) Formule de la médiane

Définition :

Dans un triangle, la **médiane issue d'un sommet** est la droite qui passe par ce sommet et le milieu du côté opposé.



Définition :

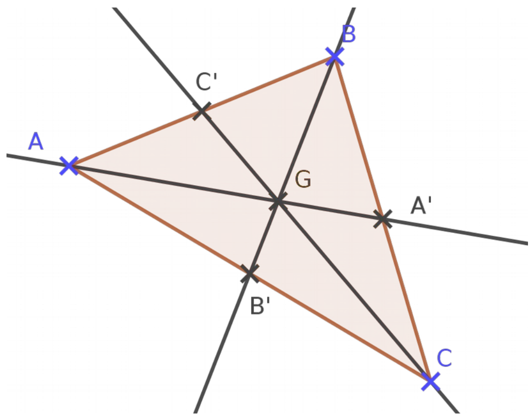
On appelle **centre de gravité** d'un triangle ABC l'unique point G tel que $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$.

Propriétés :

- Les médianes d'un triangle sont **concourantes**.
- Leur **point d'intersection** est le centre de gravité
- Le centre de gravité est situé aux deux tiers d'une médiane en partant du sommet dont elle est issue.

Démonstrations :

Soit A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].



G est le centre de gravité de ABC donc $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$, et donc $-3\vec{GA}=\vec{AB}+\vec{AC}$.

Comme A' est le milieu de [BC], alors $3\vec{AG}=2\vec{AA'}$ et donc $\vec{AG}=\frac{2}{3}\vec{AA'}$.

De même $\vec{BG}=\frac{2}{3}\vec{BB'}$ et $\vec{CG}=\frac{2}{3}\vec{CC'}$: G appartient donc à chacune des médianes du triangle, elles sont donc concourantes et leur point d'intersection est le centre de gravité de ABC.

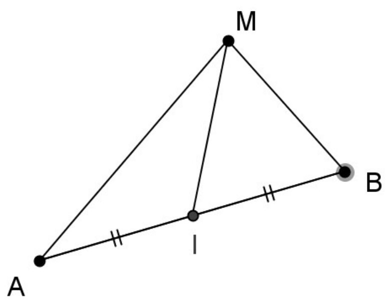
De plus, on a bien $AG=\frac{2}{3}AA'$; $BG=\frac{2}{3}BB'$ et $CG=\frac{2}{3}CC'$.

Propriétés :

Soit A et B deux points du plan, et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan :

- $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$
- $MA^2-MB^2=2\vec{IM}\cdot\vec{AB}$
- $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$



Démonstration :

Pour tout point M du plan, on a $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$.

Ainsi, $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MI}^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2$

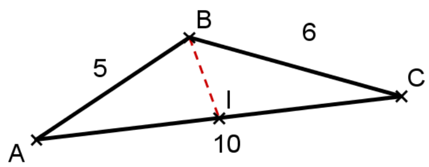
qui s'écrit encore :

$MA^2+MB^2=2\,MI^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+2\,\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2=2\,MI^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2$

Or I est le milieu de $[AB]$; on a donc $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $IA^2=IB^2=\left(\frac{1}{2}AB\right)^2=\frac{AB^2}{4}$.

On a donc $MA^2+MB^2=2\,MI^2+2\,\overrightarrow{MI}\cdot\vec{0}+\frac{\overrightarrow{AB}^2}{4}+\frac{\overrightarrow{AB}^2}{4}=2\,MI^2+\frac{AB^2}{2}$.

Exemple :



Dans le triangle *ABC* ci-contre, on a $BA^2+BC^2=2\,BI^2+\frac{AC^2}{2}$

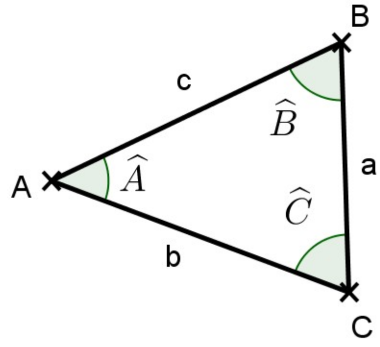
On a donc :

$BI^2=\frac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-\frac{AC^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(5^2+6^2-\frac{10^2}{2}\right)=\frac{11}{2}$, soit $BI=\sqrt{\frac{11}{2}}$.

2) Formule d'Al-Kashi

Dans un triangle *ABC*, on notera :

$a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, $\widehat{A}=\widehat{BAC}$, $\widehat{B}=\widehat{ABC}$, $\widehat{C}=\widehat{ACB}$



Propriétés :

Pour tout triangle *ABC*, on a :

- $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$
- $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$
- $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$

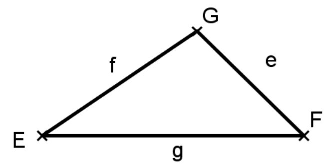
Démonstration :

$a^2=BC^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{BA}^2+2\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=BA^2+AC^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{A}$ qui est l'égalité recherchée.

Exemple :

Soit *EFG* un triangle tel que $EF=7$, $FG=4$ et $EG=5$.



On cherche à déterminer les mesures de ses angles.

On a donc : $g^2=e^2+f^2-2ef\cos\widehat{G}$

Soit $7^2=4^2+5^2-2\times4\times5\times\cos\widehat{G}$. D'où $\cos\widehat{G}=\frac{-8}{40}=-0,2$ soit $\widehat{G}\simeq101,5°$.

De même : $f^2=e^2+g^2-2eg\cos\widehat{F}$. D'où $\cos\widehat{F}=\frac{40}{50}=\frac{5}{7}$ soit $\widehat{F}\simeq44,4°$.

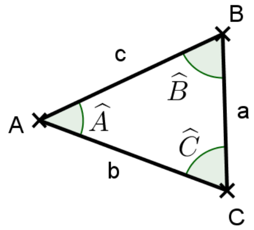
Donc $\widehat{E}=180-(\widehat{G}+\widehat{F})$, soit $\widehat{E}\simeq34,1°$.

3) Formule des aires

Propriété :

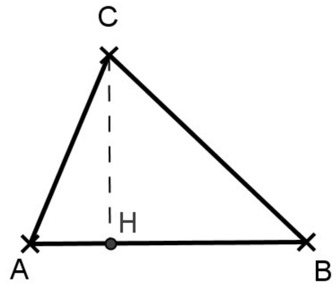
Pour tout triangle ABC non aplati, si on note $\mathcal{S}$ l'aire du triangle ABC, on a :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$



Démonstration (par disjonction des cas) :

Appelons H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

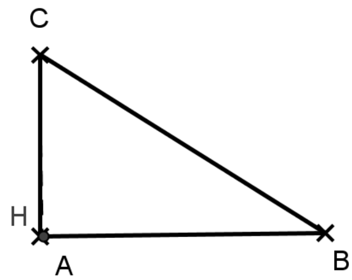


Cas 1 : $\hat{A}$ est aigu

On a $\widehat{HAC} = \widehat{BAC} = \hat{A}$

Dans le triangle AHC rectangle en H, on a $\sin\widehat{HAC} = \dfrac{HC}{AC}$, c'est-à-dire $\sin\hat{A} = \dfrac{HC}{AC}$.

ce que l'on peut encore écrire $HC = b\sin\hat{A}$

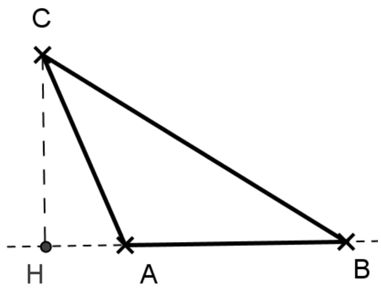


Cas 2 : $\hat{A}$ est droit

H et A sont confondus ; on a donc $HC = AC = b$.

Dans ce cas, on a $\hat{A} = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\sin\hat{A} = 1$;

on peut alors écrire $HC = b = b\times 1 = b\times\sin\hat{A}$



Cas 3 : A est obtus

$\widehat{HAC}$ et $\widehat{BAC} = \hat{A}$ sont supplémentaires ;

ils ont donc le même sinus : $\sin\widehat{HAC} = \sin\hat{A}$

Dans le triangle AHC rectangle en H, on a $\sin\widehat{HAC} = \dfrac{HC}{AC}$,

c'est-à-dire $\sin\hat{A} = \dfrac{HC}{b}$;

ce que l'on peut encore écrire $HC = b\sin\hat{A}$

Dans tous les cas, on peut écrire $HC = b\sin\hat{A}$.

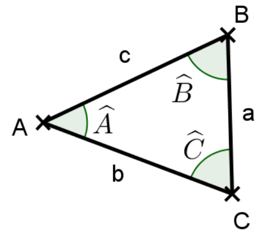
On peut donc exprimer l'aire $\mathcal{S}$ du triangle ABC : s= $\dfrac{1}{2}AB\times HC = \dfrac{1}{2}c\times b\sin\hat{A}$;

ce qui s'écrit également $\mathcal{S} = \dfrac{1}{2}bc\sin\hat{A}$.

Propriété :

Pour tout triangle ABC non aplati, on a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$



Démonstration :

On utilise la formule $2S = bc \sin \hat{A} = ac \sin \hat{B} = ab \sin \hat{C}$ et on divise par le produit abc, ce qui donne :

$$\frac{2\mathrm{S}}{abc} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \text{ ou encore } \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2\mathrm{S}}.$$

III. Résolution de problèmes géométriques

1) Lieux géométriques

Définition :

Un **lieu géométrique** est un ensemble de points qui satisfont une même condition.

Exemples :

L'ensemble des points M qui vérifient :

- MA = MB est la médiatrice du segment [AB].
- $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ est la droite (AB) ou une partie de celle-ci selon les valeurs de *k*.
- ΩM = *r* (avec *r* > 0) est le cercle de centre Ω et de rayon *r*.

2) Optimisation géométrique

Définition :

Optimiser une quantité, c'est trouver un point, ou un lieu, qui la maximise ou la minimise.

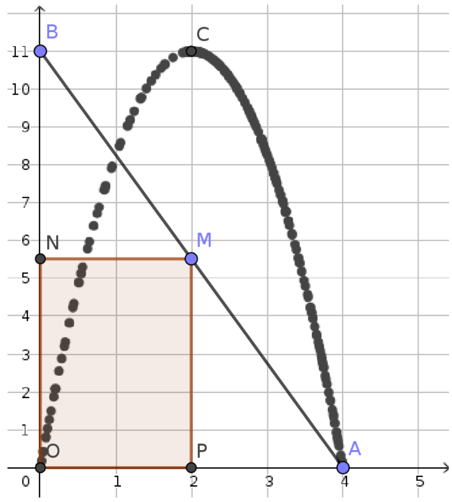
Exemple :

Soient les points A(4 ; 0) et B(0 ; 11).

On place un point M sur le segment [AB] et on place N et P sur les axes de façon à ce que MNOP soit un rectangle.

On veut savoir où placer le point M de façon à ce que l'aire du rectangle soit maximale.

À l’aide d’un logiciel de géométrie dynamique, on a tracé la figure et on a fait afficher un point C qui a pour abscisse celle du point M et pour ordonnée l’aire du rectangle.



On conjecture que cette aire est maximale pour le point M de coordonnées (2 ; 5,5).