Chapitre 8

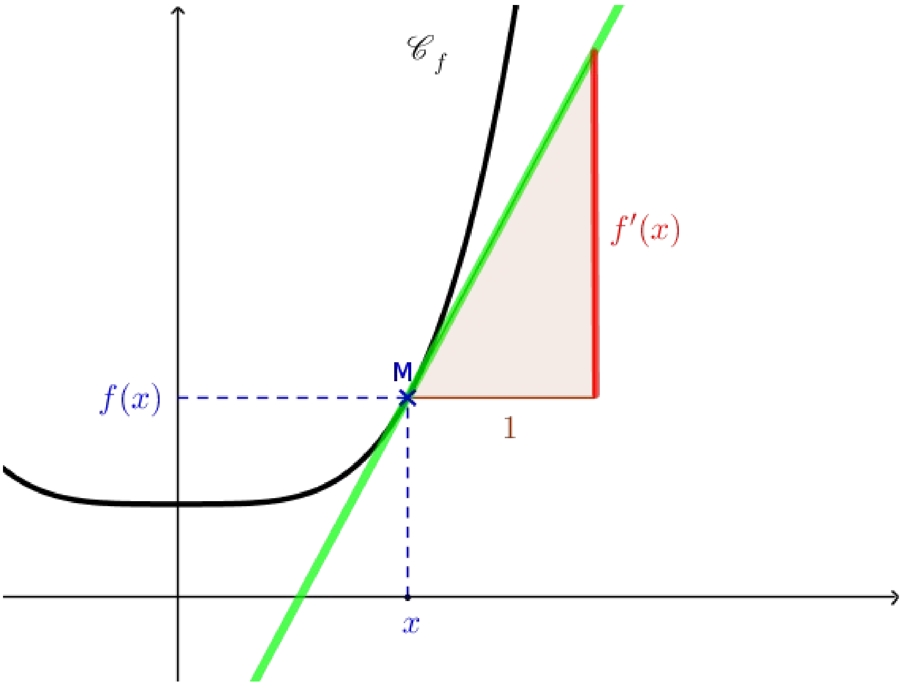
Application de la dérivation

I. Fonction dérivée et étude de fonction

1) Interprétation graphique

Dire que f est dérivable sur I signifie que, pour tout réel x de I, la courbe $\mathscr{C}_f$, représentant la fonction f, admet une seule tangente, de coefficient directeur :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



Il semble donc exister un lien entre les variations de f et le signe de f' .

2) Sens de variation

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si la fonction f est **croissante** sur I, alors la dérivée est **positive** sur I.
- Si la fonction f est **décroissante** sur I, alors la dérivée est **négative** sur I.
- Si la fonction f est **constante** sur I, alors la dérivée est **nulle** sur I.

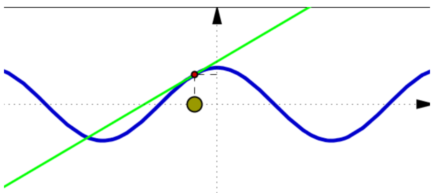
Démonstration :

On considère un réel $h>0$ et tel que $x+h \in I$.

Pour tout réel x de I, $x+h>x$:

- Si f est croissante sur I, alors $f(x+h) \geqslant f(x)$;

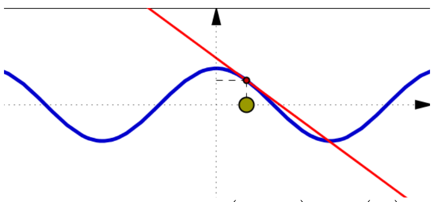
  donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est positif et alors la dérivée sera positive.



  De même, si $h<0$, on démontrerait que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ reste positif.

- Si f est décroissante sur I, alors $f(x+h) \leqslant f(x)$;

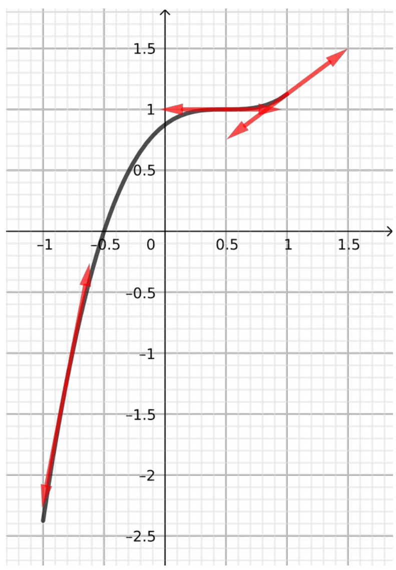
  donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est négatif et alors la dérivée sera négative.



  De même, si $h<0$, on démontrerait que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ reste négatif.

Exemple :

f est croissante sur [-1 ; 1] :



Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle *I*.

- Si la dérivée est **positive** sur *I*, alors la fonction f est **croissante** sur *I*.
- Si la dérivée est **négative** sur *I*, alors la fonction f est **décroissante** sur *I*.
- Si la dérivée est **nulle** en toute valeur de *I*, alors la fonction f est **constante** sur *I*.

Remarque :

L'étude du signe de la dérivée permet donc de donner le sens de variation d'une fonction.

Exemple :

Pour la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=x^2$, nous avons vu que $f'(x)=2x$, on a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)=2x$		$-$	0	$+$	
$f(x)=x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque :

Pour étudier les variations d'une fonction f, il n'est pas systématiquement nécessaire de déterminer la fonction dérivée f' et d'en étudier le signe.

Par exemple, soit g définie sur $]2;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x^3-8}$.

On sait que la fonction $x \longmapsto x^3$ est croissante sur $]2;+\infty[$ donc g est décroissante sur $]2;+\infty[$.

II. Extremum

1) Extremum local

Définitions :

Soit I une fonction f définie sur un intervalle I.

- On dit que f admet un **minimum local** en a, s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I, contenant a et tel que pour tout x de J, $f(x) \geq f(a)$.
- On dit que f admet un **maximum local** en a, s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I, contenant a et tel que pour tout x de J, $f(x) \leq f(a)$.

Exemple :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle [-8 ; 7] dont voici le tableau de variations :

x	-8		-1		4		7
$f(x)$	10	↘	-2	↗	6	↘	-5

D'après le tableau de variations, $f(x) \geqslant f(-1)$ pour tout x appartenant à l'intervalle]-8 ; 4[, donc la fonction f admet un minimum local en -1 qui vaut -2.

Ce n'est pas le minimum de la fonction car $f(7) = -5$.

2) Lien avec la dérivation

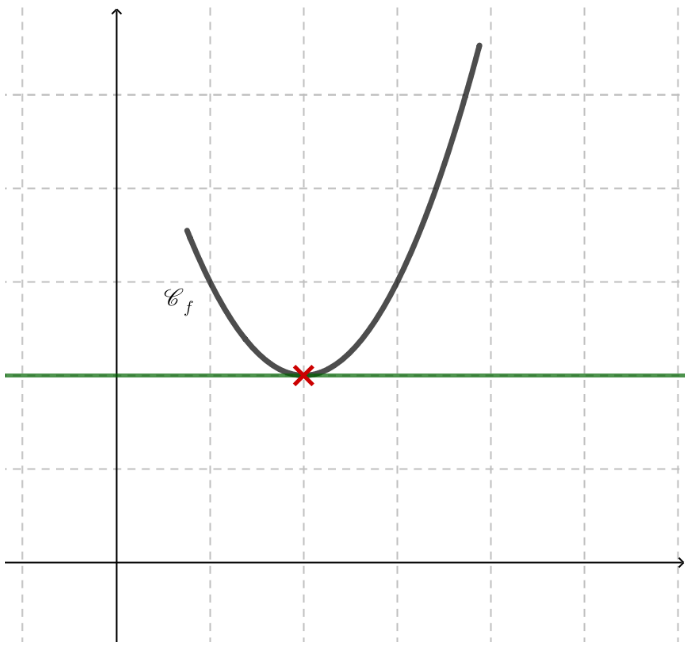
Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un nombre réel appartenant à I.

Si la fonction admet un **extremum** en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarque :

Si $f(a)$ est un extremum local, alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses.

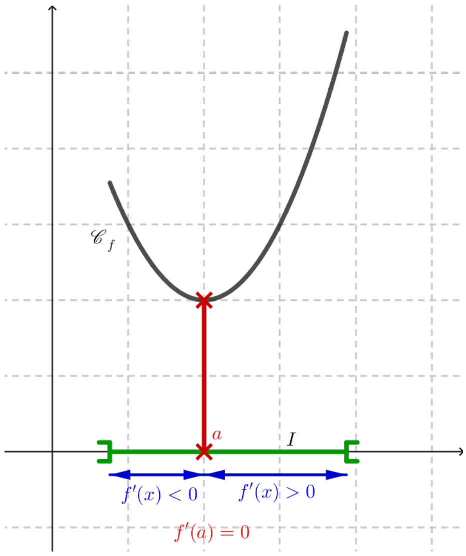


Propriété :

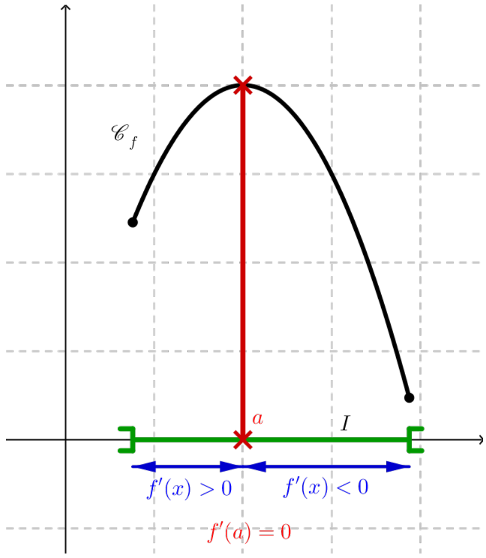
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un nombre réel appartenant à I.

Si la dérivée s'annule en **changeant de signe** en a, la fonction admet un extremum en a.

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	minimum	↗



x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	maximum	↘



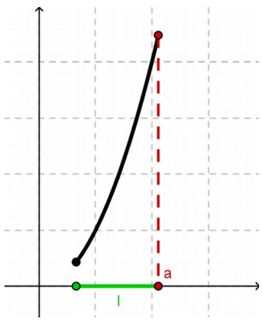
<u>Remarques :</u>

- L'hypothèse du changement de signe est nécessaire.

  La fonction $x \mapsto x^3$ n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$, pourtant elle a une dérivée qui s'annule en $x=0$ (mais la dérivée ne change pas de signe).

- Pour l'intervalle I, l'hypothèse qu'il soit ouvert permet d'éviter que le nombre réel a soit une de ses extrémités. Si tel est le cas, l'étude des variations permet de conclure.

  Par exemple, dans la situation ci-contre où f admet un maximum en a.



Propriété :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des nombres réels et $a \neq 0$.

Cette fonction f admet en $x = \frac{-b}{2a}$ un minimum si $a > 0$ et un maximum si $a < 0$.

Démonstration :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des nombres réels et $a \neq 0$.

La dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = 2ax + b$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$.

- Cas $a > 0$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{2a}$

  Le tableau de variations de f est donc :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

  Donc f admet un minimum en $x = -\frac{b}{2a}$

- Cas $a < 0$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{2a}$

  Le tableau de variations de f est donc :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

  Donc f admet un maximum en $x = -\frac{b}{2a}$